

DUE DATE SLIP**GOVT. COLLEGE, LIBRARY****KOTA (Raj.)**

Students can retain library books only for two weeks at the most.

BORROWER'S No.	DUE DATE	SIGNATURE

20 JUN 1990

प्रस्तावना

भारत की स्वतन्त्रता के बाद इसकी राष्ट्रभाषा को विश्वविद्यालय शिक्षा के माध्यम के रूप में प्रतिष्ठित करने का प्रश्न राष्ट्र के सम्मुख था। किन्तु हिन्दी में इस प्रयोजन के लिए अपेक्षित उपयुक्त पाठ्यपुस्तकें उपलब्ध नहीं होने से यह माध्यम-परिवर्तन नहीं किया जा सकता था। परिणामतः भारत सरकार ने इस न्यूनता के निवारण के लिए 'वैज्ञानिक तथा पारिभाषिक शब्दावली आयोग' की स्थापना की थी। इसी योजना के अन्तर्गत पीछे १९६६ में पाँच हिन्दी भाषी प्रदेशों में ग्रन्थ अकादमियों की स्थापना की गयी।

राजस्थान हिन्दी ग्रन्थ अकादमी हिन्दी में विश्वविद्यालय स्तर के उत्कृष्ट ग्रन्थ-निर्माण में राजस्थान के प्रतिष्ठित विद्वानों तथा अध्यापकों का सहयोग प्राप्त कर रही है और मानविकी तथा विज्ञान के प्रायः सभी क्षेत्रों में पाठ्य-ग्रन्थों का निर्माण करवा रही है। अकादमी चतुर्थ पंचवर्षीय योजना के अन्त तक तीन सौ से भी अधिक ग्रन्थ प्रकाशित कर सकेगी, ऐसी आशा करते हैं प्रस्तुत पुस्तक इसी क्रम में तैयार करवायी गयी है। हमें यह है कि यह अपने विषय में उत्कृष्ट योगदान करेगी।

चन्दनमल बंद

अध्यक्ष

स० ही० वात्स्यायन

निदेशक

भूमिका

भारतीय विश्वविद्यालयों के पाठ्यक्रमों में अब सदिश-विश्लेषण को बहुत महत्वपूर्ण स्थान दिया जा रहा है। राजस्थान विश्वविद्यालय में भी, इस विषय को टी० डी० सी० प्रथम वर्ष के पाठ्य-क्रम में रखा गया है। हिन्दी के माध्यम से अवर-स्नातक स्तर पर गणित का अध्ययन करने के लिए उचित पुस्तकों के अभाव की पूर्ति के उद्देश्य से यह पुस्तक लिखी गई है; और प्रायः भारत में सभी विश्वविद्यालयों के अवर-स्नातक स्तर के पाठ्य-क्रम के लिए पर्याप्त है।

विद्यार्थियों एवम् शिक्षकों की सुविधा का ध्यान रखते हुए त्रिकोण-मितीय अनुपात, अंक और सदिश-चिह्नों के अंग्रेजी नामों का ही प्रयोग किया गया है। परिवर्तन काल में गणितीय-स्तर को नीचे न गिरने देने के लिए यह आवश्यक है कि अंग्रेजी शब्दावली का पूर्ण बहिष्कार न किया जाय। अनुवाद के लिए केन्द्रीय हिन्दी निदेशालय, शिक्षा विभाग, भारत सरकार द्वारा प्रकाशित "अंग्रेजी-हिन्दी पारिभाषिक शब्द-संग्रह" का प्रयोग किया गया है। मानक पदों के हिन्दी-अनुवाद के साथ-साथ अंग्रेजी तुल्य भी लिखे गए हैं।

राजस्थान हिन्दी ग्रन्थ अकादमी, जयपुर ने पुस्तक रचना की जो प्रेरणा दी है उसके लिए मैं उसका आभारी हूँ। साथ ही मैं उन सभी लेखकों का भी आभारी हूँ जिनकी मानक रचनाओं का इस पुस्तक सकलन में मैंने स्वच्छंदता से उपयोग किया है। पुस्तक की हिन्दी लिपि के अवलोकन में सहयोग के लिए श्रीमती ललिता व्यास, वरिष्ठ व्याख्याता मा० सु० महाविद्यालय, बीकानेर ने प्रति भी मैं आभार प्रकट करता हूँ।

विषय सूची

अध्याय 1

	पृष्ठ
सदिशों का निरूपण और विघटन	1
1.1 सदिश और असदिश राशियाँ	1
1.2 सदिश का निरूपण करना	1
1.3 कुछ परिभाषाएँ	2
1.4 दो सदिशों के बीच का कोण	4
1.5 सदिशों का योग	4
1.6 सदिश-योग का क्रमविनिमय नियम	5
1.7 साहचर्य-नियम	6
1.8 सदिशों का व्यवकलन	7
1.9 सदिश का किसी वास्तविक अंक से गुणन	7
1.10 सदिशों के गुण	9
1.11 व्युत्क्रम-सदिश	10
1.12 स्थिति-सदिश	11
1.13 दो बिन्दुओं को मिलाने वाली सीधी रेखा को दिए हुए अनुपात में विभाजित करने वाला बिन्दु ज्ञात करना	11
1.14 समरेख-बिन्दु	13
1.15 समतलीय-सदिश	14
1.16 असमतलीय-सदिश	15
1.17 सदिश का विघटन	28
1.18 दिक्कोण	30
1.19 किन्हीं दो बिन्दुओं के बीच की दूरी ज्ञात करना और उनको मिलाने वाली रेखा के दिक्कोण ज्ञात करना	31
1.20 दो सदिशों के बीच का कोण ज्ञात करना	31

अध्याय 2

केन्द्रक तथा प्रारम्भिक भौतिक अनुप्रयोग	38
2.1 केन्द्रक	38

2.2	सहति केन्द्रक ।	40
2.3	स्थिति-सदिशों में एकघात-सम्बन्ध ।	41
2.4	कुछ साधारण भौतिक अनुप्रयोग ।	43

अध्याय 3

	सरल रेखा और समतल के सदिश-समीकरण	59
3.1	परिचय	59
3.2	सरल रेखा का समीकरण	59
3.3	सदिश समीकरण से कार्तीय समीकरण ज्ञात करना	61
3.4	तीन सदिश एक ही रेखा पर समाप्त हो ।	62
3.5	दो रेखाओं के बीच के कोण का अर्थक ज्ञात करना	63
3.6	समतल का सदिश-समीकरण ज्ञात करना	78
3.7	आवश्यक तथा पर्याप्त प्रतिबन्ध कि चार बिन्दु समतलीय हो	81

अध्याय 4

	दो सदिशों का गुणनफल	91
4.1	परिचय	91
4.2	द्विदिश-गुणनफल	91
4.3	अदिश-गुणनफल के गुण	92
4.4	लाघविक-सदिश त्रयी ।	94
4.5	सदिशों का अदिश-गुणनफल बटन-नियम का पालन करता है	94
4.6	बटन-नियम का व्यापकीकरण	96
4.7	अदिश-गुणनफल को घटको में अभिव्यक्त करना	97
4.8	स्वेच्छ आधार	99
4.9	सदिश-गुणनफल या वज्जीय गुणनफल	110
4.10	सदिश-गुणनफल की ज्यामितीय व्याख्या (सदिश-क्षेत्रफल)	110
4.11	एक महत्त्वपूर्ण सम्बन्ध	112
4.12	सदिश-गुणनफल के गुण	112
4.13	लवप्रसामान्यक त्रयी	116
4.14	सदिश-गुणनफल को घटको में अभिव्यक्त करना	116
4.15	यान्त्रिकी में अनुप्रयोग	123
4.16	बल द्वारा किया गया कार्य	124

4.17	बल का घूर्णन या ऐंठ	125
4.18	बिन्ही बलो का घूर्णन	126
4.19	किसी बल का किसी रेखा की अपेक्षा घूर्णन	126
4.20	दृढ़ वस्तु का कोणीय-वेग	128

अध्याय 5

	तीन और चार सदिशों का गुणनफल	135
5.1	परिचय	135
5.2	त्रिक-सदिश-गुणनफल	135
5.3	सदिश-त्रिक-गुणनफल को घटकों में अभिव्यक्त करना	137
5.4	प्रतिबन्ध कि तीन सदिश समतलीय हों	139
5.5	सदिश-त्रिक-गुणनफलक	139
5.6	सदिश के घटक	141
5.7	चार सदिशों का सदिश-गुणनफल	146
5.8	चार सदिशों का सदिश-गुणनफल	146
5.9	व्युत्क्रम-सदिशों की पद्धति	148
5.10	दो उपयोगी विषय	150

अध्याय 6

	ज्यामितोय अनुप्रयोग	157
6.1	परिचय	157
6.2	समतल का समीकरण अभिलम्ब रूप में	157
6.3	समतल के समीकरणों के कार्तीय तुल्य	160
6.4	दो समतलों के बीच का कोण	161
6.5	घटकों पर श्रुतः खण्ड ज्ञात करना	161
6.6	किसी बिन्दु की समतल से दूरी	162
6.7	दो समतलों के बीच के कोण को समद्विभाग करने वाले समतलों के समीकरण ज्ञात करना	164
6.8	दो समतलों को प्रतिच्छेद-रेखा में से हो कर जाने वाले समतलों का समीकरण	164
6.9	सरल-रेखा का समीकरण	165
6.10	बिन्दु P की दी हुई सरल-रेखा से लम्बवत् दूरी ज्ञात करना	166

6.11	दो सरल-रेखाओं के प्रतिच्छेदन करने का प्रतिबन्ध । या दो सरल-रेखाओं के समतलीय होने का प्रतिबन्ध	167
6.12	दो अप्रतिच्छेदी-सरल-रेखाओं के बीच न्यूनतम-दूरी	167
6.13	चतुष्फलक का आयतन	178
6.14	किसी चतुष्फलक के सम्मुख विनारो के उभयनिष्ठ अभिलम्ब की लम्बाई ज्ञात करना	179
6.15	गोले का समीकरण	180
6.16	एक गोले और सरल-रेखा का प्रतिच्छेदन ज्ञात करना	181
6.17	गोले पर स्पर्श-समतल	183
6.18	समतल गोले को स्पर्श करने का प्रतिबन्ध	183
6.19	दो गोले के एक दूसरे को समकोण पर काटने का प्रतिबन्ध	184
6.20	घ्रुबोध-समतल	185

अध्याय 7

	सदिशों का अवकलन और समाकलन	193
7.1	परिचय	193
7.2	किसी सदिश का अवकलन	193
7.3	तात्कालिक वेग और त्वरण	195
7.4	कुछ मानक रूपों का अवकलन	196
7.5	अवकलन विशेष स्थिति में	198
7.6	सदिश r के अवकलन का कार्तीय तुल्यांक	199
7.7	समाकलन	200
7.8	कुछ मानक परिणाम	201
7.9	किसी वक्र पर दिये हुए एक बिन्दु पर स्पर्श-रेखा ज्ञात करना	201

सदिशों का निरूपण और विघटन

1.1 सदिश और अदिश राशियाँ (Vector and Scalar Quantities)–

अदिश राशि (संज्ञेय मे अदिश) का केवल परिमाण होता है, इसका प्रकाश (Space) में किसी दिशा विशेष से संबंध नहीं होता। अदिश के उदाहरण सहति, आयतन, घनत्व, ताप विद्युत् आवेश और विभिन्न द्रव्यादि हैं। अदिश राशि को उल्लिखित करने के लिए हमें केवल राशि के प्रकार की इकाई मात्र की ही आवश्यकता होती है और दो हुई राशि तथा उस इकाई के अनुपात की सराया की, जिसको माप (measure) भी कहते हैं। मत जब हम कहते हैं कि वस्तु का आयतन 1000 घ. सें है, तो उसका यह अभिप्राय होता है कि इस वस्तु का आयतन उस घन के आयतन के समान होगा जिसकी भुजा 10 सें. है। इसमें दिशा की कोई आवश्यकता नहीं।

सदिश राशि :—सदिश राशि, (संज्ञेय मे सदिश) का परिमाण होता है और प्रकाश में इसका किसी निश्चित दिशा के साथ संबंध होता है। विस्थापन, गति, त्वरण, विद्युतीय तथा चुम्बकीय क्षेत्र सदिश राशि के उदाहरण हैं। किसी सदिश को उल्लिखित करने के लिए हमें न केवल इकाई और संख्या जो उस राशि का मापक है, की आवश्यकता होती है, अपितु उसकी दिशा के विवरण की भी। मत: यदि हम कहते हैं कि किसी वस्तु पर 10 पीड भार कार्य कर रहा है तो यह विवरण अपूर्ण होगा जबतक बल के कार्य करने की दिशा का विवरण न हो। इसी प्रकार यदि दो वस्तु प्रकाश में बराबर चल से, किन्तु विभिन्न दिशाओं में चल रही हैं या एक ही दिशा में विभिन्न चाल में चल रही हैं तो दोनों अवस्थाओं में उनकी गति भिन्न भिन्न होगी। सदिश राशि को पूर्ण रूप से उल्लिखित करने के लिए उसके परिमाण के साथ-साथ दिशा-बोध का ज्ञान भी आवश्यक है।

वास्तविक तथा सम्मिश्र संख्याये स्वयं अदिश है। परन्तु सदिश एक दिष्ट-संख्या (directed number) है।

1.2 सदिश का निरूपण करना (Representation of a Vector)–

पू कि एक परिमित सरल-रेखा का परिमाण और दिशा भी होती है, इसलिए किसी सदिश को एक सरल रेखा द्वारा निरूपित किया जा सकता है। रेखा की दिशा को शर-चिह्न द्वारा सूचित किया जाता है।

माना अवकाश (space) में एक स्वेच्छ बिन्दु O है तथा P एक और बिन्दु है। रेखा OP को छोटी ओर बिन्दु P पर शर चिह्न लगा दो। ऐसी दिष्ट-रेखा का खण्ड सदिश को निरूपित करता है इसको प्रायः \overrightarrow{OP} लिखा जाता है और "सदिश OP " पढ़ा जाता है। सामने चित्र न. 1 में तीर का पिछला सिरा (tail) O मूलबिन्दु या प्रारम्भिक बिन्दु कहलाना है और शर-अग्र P सदिश OP का अन्तिम बिन्दु (terminous) कहलाता है। रेखा OP की लम्बाई किसी निश्चित पैमाने में सदिश का परिमाण बताती है और O से P की ओर रेखा की दिशा, सदिश की दिशा बताती है। ऐसे सदिश को (Line Vector) रेखीय-सदिश भी कहते हैं। सुविधा के लिए सदिश को प्रायः क्लैरेण्डन (Clarendon) चिह्न, अर्थात् मोटे प्रकार की लिपि a, b, c, \dots द्वारा बताया जाता है। और इसका परिमाण तदनुरूपी तिरछी टाइप लिपि a, b, c द्वारा बताया जाता है। अतः सदिश



\overrightarrow{OA} को \mathbf{a} या $\overrightarrow{OA} = \mathbf{a}$ द्वारा अभिव्यक्त किया जाता है।

1.3 कुछ परिभाषाएँ (Some Definitions)–

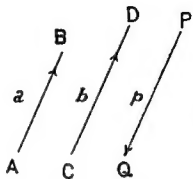
(1) सदिश का मापांक (Modulus of a Vector) – किसी सदिश का मापांक या परिमाण एक धन अंक है जोकि इसको अभिव्यक्त करने वाली रेखा की लम्बाई का माप है। सदिश a का मापांक चिह्न $|a|$ द्वारा बताया जाता है या तदनुरूपी तिरछा टाइप वर्ण (Italics) a द्वारा बताया जाता है।

(2) इकाई सदिश (Unit Vector) – वह सदिश है जिसका मापांक इकाई है। a की दिशा में इकाई सदिश \hat{a} से भी सूचित किया जाता है। अतः

$\mathbf{a} = a \hat{a}$ या $\hat{a} = \frac{\mathbf{a}}{a}$ जबकि a सदिश \mathbf{a} का मापांक है।

(3) समरेख-सदिश (Collinear Vectors):—वह सब सदिश जिनके

रेखीय खण्ड (line segments) समानान्तर हैं (बिना उनकी दिशा और परिमाण के विचार के) समरेख सदिश कहलाते हैं, जैसे चित्र में $\vec{a} = \vec{AB}$, $\vec{b} = \vec{CD}$, $\vec{p} = \vec{PQ}$ तीनों समरेख सदिश हैं, क्योंकि उनके रेखा-खण्ड समानान्तर हैं।



सदिश

(4) स्वतन्त्र तथा स्थानीकृत-सदिश (Free and Localized Vectors):—ऐसा सदिश जिसका मूलबिन्दु अवकाश में किसी भी स्वेच्छ बिन्दु पर लिया जा सकता है; स्वतन्त्र-सदिश कहलाता है। यदि मूलबिन्दु पर प्रतिबन्ध लगाया जाय और सदिश का रेखीय-खण्ड अवकाश में किसी निश्चित बिन्दु में से गुजरता है तो वह सदिश स्थानीकृत-सदिश कहलाता है। किसी सदिश के भौतिक प्रभाव अवकाश में उसकी स्थिति पर निर्भर करते हैं, जैसे किसी वस्तु पर कार्य कर रहे बल का प्रभाव उसकी कार्य-दिशा पर निर्भर करता है।

(5) सजातीय-सदिश (Like Vectors):—वे समरेख-सदिश जिनकी दिशा भी समान होती है, सजातीय सदिश कहलाते हैं। ऊपर चित्र में \vec{AB} और \vec{CD} सजातीय-सदिश हैं और \vec{AB} और \vec{PQ} विजातीय सदिश हैं।

(6) समान-सदिश (Equal Vectors):—दो सदिश \vec{a} और \vec{b} समान होंगे यदि और केवल यदि (iff) वह समानान्तर हैं और उनकी दिशा व परिमाण भी समान हैं। (सदिशों के प्रारम्भ के बिन्दु चाहे भिन्न भी हों) अतः यदि \vec{AB} , \vec{CD} समानान्तर रेखाएँ हैं और $\vec{AB} = \vec{CD}$ तो

$$\vec{AB} = \vec{CD}$$

(7) शून्य-सदिश (Null Vector):—वह सदिश जिसका प्रारम्भिक और अन्तिम सिरा एक दूसरे पर सपाती हों, शून्य-सदिश कहलाता है। यह

स्पष्ट है कि शून्य सदिश का परिमाण शून्य होता है; और उसकी दिशा अनिर्धारित होती है, अर्थात् उसकी कोई भी दिशा हो सकती है। सब शून्य-सदिश समान होते हैं। शून्य-सदिश को मोटे टाइट, $\vec{0}$

$$\vec{0} \text{ या } \vec{AA}, \vec{BB}$$

द्वारा निरूपित किया जाता है। शून्य-सदिश को छोड़ अन्य सदिशों को उचित (Proper) सदिश भी कहते हैं।

(8) ऋण सदिश (Negative Vector) — वह सदिश जिसका परिमाण सदिश \vec{a} के समान हो परन्तु उसकी दिशा \vec{a} की दिशा के विपरीत हो तो वह \vec{a} का ऋण-सदिश कहलाता है। इसको हम $-\vec{a}$ लिखते हैं।

(9) समतलीय-सदिश (Coplanar Vector) — तीन या तीन से अधिक सदिश समतलीय-सदिश कहलाते हैं, यदि वह एक ही समतल के समानान्तर हो। कोई भी समतल जो इस समतल के समानान्तर है, सदिश समतल कहलाता है।

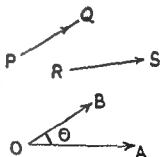
1.4 दो सदिशों के बीच का कोण (Angle between two Vectors) —

माना $\vec{PQ} = \vec{a}$, $\vec{RS} = \vec{b}$ दो सदिश हैं। मूलबिन्दु O से OA और OB दो रेखाएँ PQ और RS के समानान्तर खींचीं तो $\angle AOB$ (θ) सदिश \vec{a} और \vec{b} के बीच का कोण कहलाता है यदि

$$0 \leq \theta \leq \pi$$

$\theta = 0$ या π हो तो सदिश समांतर होंगे।

(सजातीय जब $\theta = 0$, और विजातीय जब $\theta = \pi$)



यदि $\theta = \frac{\pi}{2}$ तो सदिश एक दूसरे के लम्बवत् होंगे।

1.5 सदिशों का योग (Addition of Vectors) — सदिश राशियों का योग त्रिभुज के नियम से किया जाता है जिसका वर्णन निम्न प्रकार है :

यदि तीन बिन्दु O, A, C इस प्रकार लिए जाएं कि

$$\vec{OA} = \mathbf{a} \text{ और } \vec{AC} = \mathbf{b}$$

अब \mathbf{b} का प्रारम्भिक सिरा \mathbf{a} का अन्तिम सिरा हो तो सदिश \vec{OC}

सदिश \mathbf{a} और \mathbf{b} का परिणामित
या सदिश-योग होगा

$$\vec{OC} = \mathbf{c} = \mathbf{a} + \mathbf{b}$$

यह योग O की स्थिति
से स्वतन्त्र होता है। सदिश

\vec{OC} , \vec{OA} और \vec{AC} दोनों सदिशों

का संयुक्त प्रभाव निरूपित करता है। $+$ के चिह्न का सुमिश्रण अंकगणितीय
योग से नहीं, सिवाय जब O, A, C समरेख हो।

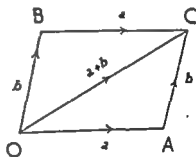
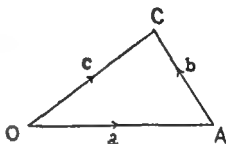
OA और AC को आसन्न भुजाएँ मान कर समांतर-चतुर्भुज
 $OACB$ खींचो। तब

$$\vec{OA} = \vec{BC} = \mathbf{a}$$

$$\text{और } \vec{OB} = \vec{AC} = \mathbf{b}$$

$$\vec{OA} + \vec{AC} = \vec{OC} = \vec{OB} +$$

$$\vec{BC} = \vec{OA} + \vec{OB}$$



इससे स्पष्ट है कि सदिश

$\mathbf{a} = \vec{OA}$, $\mathbf{b} = \vec{OB}$ का योग सदिश \vec{OC} है जोकि उस समानान्तर
चतुर्भुज का विकर्ण है जो OA , और OB को आसन्न भुजाएँ मानकर बनाया
जाय। अतः हम देखते हैं कि योग का त्रिभुज का नियम, बलों के समानान्तर
चतुर्भुज के नियम के सर्वसम है।

1.6 सदिश-योग का क्रमविनिमेय नियम (Commutative Law of
Vector Addition)–चित्र नं० 1.5 में,

$$\vec{OA} + \vec{AC} = \vec{OC} = \vec{OB} + \vec{BC}$$

सदिश a और एक वास्तविक संख्या m का गुणनफल एक ऐसा सदिश है जिसका परिमाण a के परिमाण का $|m|$ गुना है, और इसकी दिशा a ही की दिशा होती है, इसको ma से निर्दिष्ट किया जाता है।

सदिश ma , अदिश राशि m की सदिश a से अदिश-गुणन कहलाती है।

सदिश a का अदिश m से विभाजित करने की परिभाषा a को $\frac{1}{m}$ ($m \neq 0$) से गुणन करना है। अतः यदि e एक a की दिशा में इकाई सदिश है तो $e = \frac{a}{a}$, और यदि b एक सदिश a के समानान्तर है तो

$$\frac{b}{b} = \pm \frac{a}{a}$$

चिह्न + यदि b, a की दिशा में है और - यदि वह विपरीत दिशा में है।

यदि दो सदिश (शून्य रहित) समानान्तर हैं तो हम s एक ऐसा अदिश प्राप्त कर सकते हैं कि—

$$a = s b. \quad \dots (1)$$

विलोमतः यदि दो सदिशों में (1) के रूप का संबंध हो तो दोनों सदिश एक दूसरे के समानान्तर होंगे।

(1) से स्पष्ट है कि a और b के बीच एकघात संबंध है, या a और b एकघाततः आश्रित हैं। और यदि (1) के प्रकार का संबंध उन में नहीं है तो वे एकघाततः स्वतंत्र होंगे। अतः

दो शून्य रहित सदिश यदि समानान्तर हो तो उसके लिए आवश्यक और पर्याप्त प्रतिबन्ध यह है कि वे एकघाततः आश्रित हों।

व्यापक रूप से यदि तीन या अधिक सदिशों के बीच

$$xa + yb + zc + \dots = 0 \quad \dots (2)$$

(x, y, z, \dots अदिश हैं और सब शून्य नहीं हैं)

उपर्युक्त प्रकार का संबंध विद्यमान है तो सदिशों a, b, c, \dots की पद्धति एकघाततः आश्रित कहलाती है। और यदि वह एकघाततः स्वतंत्र हों तो

$$x=y=z=\dots=0, \quad \dots (3)$$

1.10 सदिशों के गुण (Properties of Vectors)

1. सदिश का अदिश से गुणन की क्रिया साहचर्य नियम का पालन करती है। क्योंकि

$$m(na) = mna = n(ma).$$

2. सदिश का अदिश से गुणन की क्रिया वंटन (Distributive) के नियम का पालन करती है। अर्थात्

$$(m+n)a = ma + na. \quad \dots (1)$$

$$m(a+b) = ma + mb. \quad \dots (2)$$

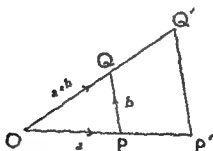
सम्बन्ध (1) तो सदिश की अदिश से गुणन की परिभाषा से ही स्पष्ट है।

सम्बन्ध (2) को निम्न रूप से सिद्ध कर सकते हैं

$$\text{माना } \vec{OP} = a \text{ और } \vec{PQ} = b. \quad \dots (1)$$

$$\text{तो } \vec{OQ} = \vec{OP} + \vec{PQ} = a + b. \quad \dots (2)$$

माना P' , Q' , OP और OQ पर दो ऐसे बिन्दु हैं कि



$$\frac{OP'}{OP} = \frac{OQ'}{OQ} = m. \quad \dots (3)$$

(चित्र में m घन है)

(3) से स्पष्ट है कि रेखा $P'Q'$, PQ के समानान्तर है। क्योंकि त्रिभुज OPQ और $OP'Q'$ अनुरूप हैं।

$$\text{तब } \frac{1}{a} = \frac{1}{a} \hat{a} = \frac{\hat{a}}{|a|}.$$

यह स्पष्ट है कि इकाई सदिश का व्युत्क्रम-सदिश स्वयं इकाई सदिश ही है। इसलिये इकाई-सदिश स्वतः-व्युत्क्रम (Self reciprocal) सदिश है।

1.12 स्थिति-सदिश (Position Vectors)

यदि O एक नियत मूल-बिन्दु है तो किसी बिन्दु P की स्थिति अद्वितीय रूप से सदिश \vec{OP} द्वारा अभिव्यक्त की जा सकती है। \vec{OP} , P बिन्दु का O के सापेक्ष स्थिति-सदिश कहलाता है। अतः P का O के सापेक्ष स्थिति-सदिश एक ऐसा सदिश है जिसका प्रारम्भिक बिन्दु तो O है और अन्तिम बिन्दु (Terminal Point) P है। जिन सदिशों का एक ही प्रारम्भिक बिन्दु होता है वह सह-प्रारम्भिक-सदिश (Co-initial) कहलाते हैं। यदि हमें मूल-बिन्दु O दिया हुआ हो, तो अवकाश में किसी भी बिन्दु P के साथ हम सदिश \vec{OP} ($=r$) का सम्बन्ध जोड़ सकते हैं। विलोमतः हमें यदि कोई सदिश दिया हुआ है तो मूल-बिन्दु O के सापेक्ष हम एक बिन्दु P ऐसा अवकाश में ज्ञात कर सकते हैं कि \vec{OP} दिये हुए सदिश को अभिव्यक्त करता है। इस प्रकार युक्लीडीयन (Euclidean) अवकाश में प्रत्येक बिन्दु के साथ एक सदिश का सम्बन्ध जोड़ने से उपलब्ध सदिशों की पद्धति को सदिश-क्षेत्र (Vector field) कहते हैं।

सुविधा के लिये बिन्दुओं $A, B, C \dots$ के स्थिति-सदिशों को मोटे टाइप के चिह्नों क्लैरेन्डन (Clarendon) लिपि के वर्णों $a, b, c \dots$ द्वारा निर्दिष्ट किया जाता है। अतः सदिश

$$\vec{AB} = b - a$$

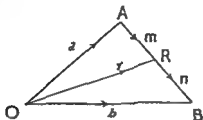
क्योंकि—

$$\vec{AB} = \vec{AO} + \vec{OB} = -a + b = b - a.$$

(नीचे अनुच्छेद 1.13 के चित्र में देखें)

- 1.13 दो बिन्दुओं को मिलाने वाली रेखा को $m : n$ के अनुपात में विभाजित करने वाले बिन्दु को ज्ञात करना (To find the Point which divides the join of two points in a given ratio $m : n$)

माना मूल-बिन्दु O के सापेक्ष बिन्दु A और B के स्थिति-सदिश क्रमशः a और b हैं अर्थात्



$$\vec{OA} = a, \quad \vec{OB} = b.$$

माना बिन्दु R , AB को $m : n$ के अनुपात में विभाजित करता है। और इसका स्थिति-सदिश r है। तो

$$\frac{AR}{BR} = \frac{m}{n}$$

$$\text{या } n \vec{AR} = m \vec{RB}. \quad \dots (1)$$

$$\begin{aligned} \text{परन्तु } \vec{RB} &= \vec{OB} - \vec{OR}, \\ &= b - r. \end{aligned} \quad \dots (2)$$

$$\begin{aligned} \text{और } \vec{AR} &= \vec{OR} - \vec{OA}, \\ &= r - a. \end{aligned} \quad \dots (3)$$

(1), (2) और (3) से

$$n(r - a) = m(b - r).$$

$$\text{या } (m + n)r = na + mb.$$

$$\text{या } r = \frac{na + mb}{m + n}, \quad (m + n \neq 0) \quad \dots (4)$$

विशेष स्थिति में यदि $m = n$ तो

$$\vec{OR} = \frac{1}{2}(a + b). \quad \dots (5)$$

अर्थात् R , AB का मध्य-बिन्दु है।

सदिशों का निरूपण और विघटन

नोट :—यदि समीकरण (4) में हम m और n को परस्पर बदल दें तो

हमें $\frac{ma + nb}{m + n}$ सदिश प्राप्त होता है जो \vec{OR} से भिन्न होगा जबतक $m \neq n$

के न हो।

माना बिन्दु C और D , AB को एक ही अनुपात $\lambda : 1$ में अन्त-विभाजित और बाह्य विभाजित करते हैं और उनके स्थिति-सदिश: c और d हैं तो

$$c = \frac{a + \lambda b}{\lambda + 1} \quad \dots(6)$$

$$\text{और } d = \frac{a - \lambda b}{1 - \lambda} \quad \dots(7)$$

यदि समीकरण (6) और (7) में से a और b का मान ज्ञात करें तो हम देखेंगे कि बिन्दु A और B खण्ड CD को $1 - \lambda : 1 + \lambda$ के अनुपात में विभाजित करते हैं। ऐसे बिन्दु A, B और C, D के युग्मों को हरात्मक संयुग्मी (Harmonic Conjugate) कहते हैं।

1.14 समरेख-बिन्दु (Collinear points)

आवश्यक और पर्याप्त प्रतिबन्ध, जिसमें तीन भिन्न बिन्दु R, A, B एक रेखास्थ हों, यह है कि हम तीन सदिश राशियाँ l, m, n (शून्य से भिन्न) ऐसी ज्ञात कर सकते हैं कि

$$lr + ma + nb = 0.$$

$$\text{और } l + m + n = 0.$$

(i) प्रतिबन्ध आवश्यक है :—

माना R, A, B तीन समरेख बिन्दु हैं। माना R, AB को $n : m$ के अनुपात में बाँटता है। तो

$$(m + n) r = ma + nb.$$

$$\text{या—} (m + n) r + ma + nb = 0.$$

अर्थात् r, a , और b के गुणांकों का योग शून्य है।

(ii) प्रतिबन्ध पर्याप्त है

माना हमें दिया हुआ है कि

$$lr + ma + nb = 0, \text{ और}$$

$$l + m + n = 0.$$

तो सिद्ध करना है कि r, a, b समरेख हैं।

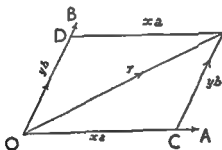
उपर्युक्त सम्बन्ध से

$$r = \frac{ma + nb}{-l} = \frac{ma + nb}{m + n} \quad \dots (1)$$

(1) से स्पष्ट है कि r , अर्थात् बिन्दु R, A और B को मिलाने वाली रेखा को $n : m$ के अनुपात में बाँटता है। अतः a, b और r समरेख हैं।

1.15 समतलीय-सदिश: (Coplanar vectors)

कोई भी सदिश r , जो दिये हुए दो असमरेख सदिशों a , और b के साथ समतलीय है, वह एक मात्र विधि से दिये हुए सदिशों के एक-घात संचय में अभिव्यक्त किया जा सकता है



माना $\vec{OA} = a$ और $\vec{OB} = b$ दो असमरेख-सदिश हैं और $\vec{OR} = r$, a, b के समतल में कोई सदिश है। R में से RC और RD दो सरल-रेखाएँ

क्रमशः \vec{OB} और \vec{OA} के समानान्तर खींचो जो OA और OB को बिन्दु C और D पर मिलती हैं।

\vec{OC}, \vec{OA} का समरेख है और \vec{OD}, \vec{OB} का।

$$\therefore \vec{OC} = x a,$$

$$\text{और } \vec{OD} = \vec{OB} = \vec{CR}. \quad (x, y \text{ अदिश हैं})$$

$$\text{परन्तु } \vec{OR} = \vec{OC} + \vec{CR}.$$

$$\text{या } \vec{r} = x\vec{a} + y\vec{b}. \quad \dots(1)$$

x और y , सदिश \vec{r} के \vec{a} और \vec{b} की दिशाओं में घटक हैं।

उपयुक्त संचय (1) अद्वितीय है।

माना $\vec{r} = x\vec{a} + y\vec{b}$ एक अद्वितीय संचय नहीं है तो \vec{r} को \vec{a} और \vec{b} के एक और भिन्न एकघात सम्बन्ध में अभिव्यक्त कर सकते हैं। जैसे

$$\vec{r} = x'\vec{a} + y'\vec{b}. \quad \dots(2)$$

(1) और (2) से

$$\vec{r} = x\vec{a} + y\vec{b} = x'\vec{a} + y'\vec{b}.$$

$$\text{या } (x - x')\vec{a} + (y - y')\vec{b} = \vec{0}. \quad \dots(3)$$

यदि $x - x' \neq 0$ और $y - y' \neq 0$, तो

$$\vec{a} = \frac{y' - y}{x - x'} \vec{b}. \quad \dots(4)$$

$$\text{या } \vec{a} = k \vec{b}, \quad \left(k = \frac{y' - y}{x - x'} \right)$$

अर्थात् \vec{a} और \vec{b} समरेख हैं जो कि परिकल्पना के विपरीत है।

इसलिये

$$x - x' = y - y' = 0.$$

$$\text{या } x' = x \text{ और } y' = y.$$

अतः सम्बन्ध (1) अद्वितीय है।

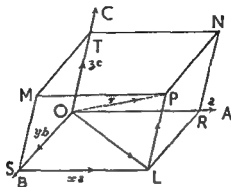
1.16 असमतलीय-सदिश (Non-Coplanar vectors)

कोई भी सदिश \vec{r} किन्हीं तीन असमतलीय-सदिशों $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ के एकघात संचय में एक मात्र विधि से अभिव्यक्त किया जा सकता है -

माना $\vec{OA}, \vec{OB}, \vec{OC}$ तीन असमतलीय-सदिश भ्रमशः $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ है।

और \vec{OP} एक और सदिश है और $\vec{OP} = \vec{r}$.

बिन्दु P मे से समतल BOC, COA और AOB के समानान्तर तीन



समतल सीधे जो OA, OB और OC को क्रमशः R, S, T पर मिलते हैं। इस प्रकार हम समानान्तर-फलक (parallelepiped) OSLRTMPN प्राप्त करते हैं जिसका विकर्ण OP है।

चूँकि \vec{OR} , सदिश \vec{OA} के साथ समरेख है।

$$\therefore \vec{OR} = x\vec{a} = \vec{SL} \quad \dots (1)$$

जबकि x एक अदिश राशि है।

इसी प्रकार

$$\vec{OS} = \vec{RL} = y\vec{b} \quad \dots (2)$$

$$\text{और } \vec{OT} = \vec{LP} = z\vec{c} \quad \dots (3)$$

y , और z भी अदिश हैं।

$$\text{अब } \vec{r} = \vec{OP} = \vec{OL} + \vec{LP} \quad \dots (4)$$

$$\text{परन्तु } \vec{OL} = \vec{OS} + \vec{SL}$$

$$\therefore \vec{r} = x\vec{a} + y\vec{b} + z\vec{c} \quad \dots (5)$$

xa , yb , और zc , सदिश r के, OA , OB , OC की दिशाओं में घटक हैं।

सदिश a , b , c त्रिविमनीय (3-D) में आधार-सदिश (Base Vectors) कहलाते हैं।

उपर्युक्त संचय अद्वितीय है।

$$\text{माना } r = xa + yb + zc$$

यह एक अद्वितीय संचय नहीं है तो इसको एक दूसरे संचय में निम्न प्रकार से अभिव्यक्त कर सकते हैं।

$$r = x'a + y'b + z'c. \quad \dots(6)$$

(5) और (6) से

$$r = xa + yb + zc = x'a + y'b + z'c$$

$$\text{या } (x - x')a + (y - y')b + (z - z')c = 0$$

$$\text{यदि } x - x' \neq 0, \text{ और } y - y' \neq 0, z - z' \neq 0,$$

$$\text{तो } a = pb + qc \quad \left[p = \frac{y' - y}{x - x'}, q = \frac{z' - z}{x - x'} \right] \quad \dots(7)$$

अर्थात् a को b और c के एकघात संचय में अभिव्यक्त कर सकते हैं इसलिये a , b और c समतलीय हैं जो कि परिकल्पना के विरुद्ध है। जबकि यदि $p = q = 0$ न हो।

$$\therefore y' - y = z - z' = 0$$

$$\text{या } y = y' \text{ और } z = z'. \text{ इसी प्रकार } x = x'.$$

अतः एकघात संचय (5) अद्वितीय है।

नोट :- यदि a , b , c तीन असमतलीय सदिश हैं और उनमें निम्न-लिखित प्रकार का सम्यन्व विद्यमान हो—

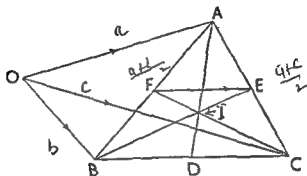
$$la + mb + nc = 0,$$

$$\text{तो } l = m = n = 0.$$

उदाहरण नं० I

D , E , F त्रिभुज ABC की भुजा BC , CA , AB के क्रमशः मध्य बिन्दु हैं। सिद्ध करो कि (i) $\vec{FE} = \frac{1}{2}\vec{BC}$; (ii) और सदिश \vec{AD} , \vec{BE} और \vec{CF} का योग शून्य के बराबर है। (iii) और माध्यिकाएँ एक ही बिन्दु पर मिलती हैं जो इनका गमनिभाजन करता है। [Raj. '63]

माना A, B, C के स्थिति-सदिश (Position Vector) मूलबिंदु O के सापेक्ष क्रमशः a, b, c हैं। और D, E, F ; BC, CA, AB के मध्यबिंदु हैं।



E और F के स्थिति-सदिश

$\frac{a+c}{2}$, और $\frac{a+b}{2}$ होंगे।

$$\therefore \text{सदिश } \vec{FE} = \frac{1}{2}(a+c) - \frac{1}{2}(a+b) = \frac{1}{2}(c-b) \quad \dots(1)$$

$$\text{सदिश } \vec{BC} = c - b = \vec{OC} - \vec{OB} \quad \dots(2)$$

(1) और (2) से

$$\vec{FE} = \frac{1}{2} \vec{BC} \quad \checkmark$$

(ii) सदिश \vec{OD}, \vec{OE} और \vec{OF} क्रमशः

$$\frac{b+c}{2}, \frac{c+a}{2}, \text{ और } \frac{a+b}{2} \text{ हैं } \checkmark$$

$$\therefore \vec{AD} = \frac{b+c}{2} - a = \frac{b+c+2a}{2}$$

$$\vec{BE} = \frac{c+a}{2} - b = \frac{c+a+2b}{2}$$

$$\vec{CF} = \frac{a+b}{2} - c = \frac{a+b+2c}{2}$$

... (3)

(3) से

$$\vec{AD} + \vec{BE} + \vec{CF} = \vec{0}.$$

(iii) माना बिंदु I, \vec{AD} को 2 : 1 अनुपात में विभाजित करता है। तो I बिंदु का स्थिति-सदिश $= \frac{2}{3}$

$$= \frac{1 \cdot \vec{a} + 2 \cdot \frac{(\vec{b} + \vec{c})}{2}}{3} = \frac{\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}}{3}$$

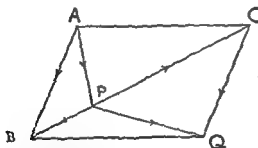
सममिति से हम जात कर सकते हैं कि \vec{BE} और \vec{CF} को 2 : 1 के अनुपात में बाटने वाले बिंदुओं के स्थिति-सदिश भी

$$\frac{\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}}{3} \text{ होंगे।}$$

अतः बिंदु I तीनों माध्यिकाओं पर स्थित है।

2. ABC एक त्रिभुज है और भुजा BC में P कोई बिन्दु है। यदि

\vec{PQ} सदिश \vec{AP} , \vec{PB} , \vec{PC} का परिणामित हो तो सिद्ध करो कि ABQC एक सामानान्तर चतुर्भुज है। और Q एक नियत बिन्दु है। [Luck '45 '54]



माना P त्रिभुज ABC की भुजा BC में कोई बिन्दु है। त्रिभुज

$$\text{APB में } \vec{AP} + \vec{PB} = \vec{AB}$$

∴ (1)

C बिन्दु से AB के सामानान्तर और AB के बराबर रेखा CQ खींचो।

$$\text{तब } \vec{CQ} = \vec{AB} = \vec{AP} + \vec{PB}$$

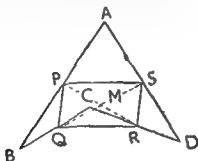
∴ (2)

$$\text{अब त्रिभुज PCQ में, } \vec{PQ} = \vec{PC} + \vec{CQ} = \vec{PC} + \vec{AP} + \vec{PB}$$

अर्थात् \vec{PQ} , \vec{AP} , \vec{PB} और \vec{PC} का परिणामित है।

यह चूँकि CQ , AB के बराबर व सामानान्तर है इसलिए $ABQC$ सामानान्तर चतुर्भुज है।

3. किसी विषमतल (skew) चतुर्भुज में सम्मुख भुजाओं के मध्य बिन्दुओं को मिलाने वाली रेखाएँ एक दूसरे को समद्विभाग करती हैं। और यह भी सिद्ध करो कि भुजाओं के मध्य बिन्दुओं को क्रमशः मिलाने वाली रेखाएँ समानान्तर चतुर्भुज बनाती हैं। [Raj. '65, '67]



$ABCD$ एक चतुर्भुज है और P, Q, R, S भुजा AB, BC, CD और DA के मध्यबिन्दु हैं।

माना A, B, C, D के स्थिति-सदिश क्रमशः a, b, c, d हैं।

तो P, Q, R, S के स्थिति-सदिश क्रमशः

$$\frac{a+b}{2}, \frac{b+c}{2}, \frac{c+d}{2}, \frac{d+a}{2} \text{ हैं।}$$

यदि PR का मध्य बिन्दु M है, तो M का स्थिति-सदिश

$$= \frac{1}{2} \left(\frac{a+b}{2} + \frac{c+d}{2} \right) = \frac{a+b+c+d}{4} \quad \dots(1)$$

इसी प्रकार QS के मध्य बिन्दु के स्थिति-सदिश

$$= \frac{a+b+c+d}{4} \quad \dots(2)$$

अतः PR और QS एक दूसरे को समद्विभाग करती हैं।

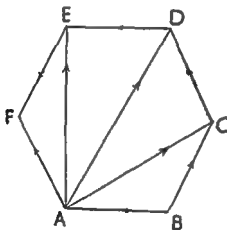
$$\vec{PQ} = \frac{b+c}{2} - \frac{a+b}{2} = \frac{c-a}{2} \quad \dots(3)$$

$$\vec{SR} = \frac{\vec{c} + \vec{d}}{2} - \frac{\vec{d} + \vec{a}}{2} = \frac{\vec{c} - \vec{a}}{2} \quad \dots(4)$$

(3) और (4) से स्पष्ट है कि PQ, RS के समानान्तर हैं और बराबर हैं।
अतः PQRS एक समानान्तर चतुर्भुज है।

4. यदि किसी समान षट्भुज ABCDEF की दो क्रमिक (consecutive) भुजाएँ सदिश \vec{a} , \vec{b} हों तो \vec{CD} , \vec{DE} , \vec{EF} , \vec{FA} , \vec{AC} , \vec{AD} , \vec{AE} और \vec{CE} को \vec{a} व \vec{b} में अभिव्यक्त करो। [Ra. '62, Utkal '53]

$$\text{माना } \vec{AB} = \vec{a} \text{ और } \vec{BC} = \vec{b}; \vec{AC} = \vec{AB} + \vec{BC} = \vec{a} + \vec{b} \quad \dots(1)$$



$$\vec{AD} = 2\vec{BC} = 2\vec{b} \quad \dots(2)$$

$$\vec{CD} = \vec{AD} - \vec{AC} = 2\vec{b} - (\vec{a} + \vec{b}) = \vec{b} - \vec{a} \quad \dots(3)$$

$$\vec{FA} = -\vec{CD} = \vec{a} - \vec{b} \quad \dots(4)$$

$$\vec{DE} = -\vec{a} \quad \dots(5)$$

$$\vec{EF} = -\vec{BC} = -\vec{b} \quad \dots(6)$$

$$\vec{AE} = -(\vec{EF} + \vec{FA}) = \vec{b} + \vec{b} - \vec{a} = 2\vec{b} - \vec{a} \quad \dots(7)$$

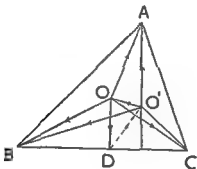
5. यदि O और O' किसी त्रिभुज ABC के परिकेंद्र (circumcentre) और लम्ब केन्द्र (orthocentre) हो तो सिद्ध करो कि

- (i) सदिश $\vec{OA} + \vec{OB} + \vec{OC} = \vec{OO'}$,
 (ii) $\vec{O'A} + \vec{O'B} + \vec{O'C} = 2\vec{O'O}$ } (Raj. '62, '66)
 (iii) $\vec{AO'} + \vec{O'B} + \vec{O'C} = \vec{AP}$

जबकि AP परिणत वृत्त का व्यास है।

[Patna '51]

त्रिभुज ABC के O और O' परिकेन्द्र तथा लम्ब-केन्द्र हैं। और D, BC का मध्य बिन्दु है।



त्रिकोण मिति से हम जानते हैं कि

$$AO' = 2OD \quad \dots(1)$$

$$\vec{OD} = \frac{\vec{OB} + \vec{OC}}{2}$$

$$\text{या } \vec{OB} + \vec{OC} = 2 \vec{OD} = \vec{AO'} \quad \dots(2)$$

दोनों ओर \vec{OA} जोड़ने पर

$$\vec{OA} + \vec{OB} + \vec{OC} = \vec{AO'} + \vec{OA} \quad \dots(3)$$

$\triangle AOO'$ से

$$\vec{OA} + \vec{AO'} = \vec{OO'} \quad \dots(4)$$

$$\text{अतः } \vec{OA} + \vec{OB} + \vec{OC} = \vec{OO'} \quad \dots(5)$$

(ii) चूँकि D, BC का मध्य बिन्दु है इसलिये

$$\vec{O'D} = \frac{\vec{O'B} + \vec{O'C}}{2}$$

$$\text{या } \vec{O'B} + \vec{O'C} = 2 \vec{O'D} \quad \dots(6)$$

$\triangle OO'D$ से

$$\vec{O'D} = \vec{OD} + \vec{O'O} \quad \dots(7)$$

(6) और (7) से

$$\begin{aligned} \vec{O'B} + \vec{O'C} &= 2 \vec{OD} + 2 \vec{O'O} \\ &= \vec{AO'} + 2 \vec{O'O} \end{aligned}$$

$$\text{या } \vec{O'B} + \vec{O'C} + \vec{O'A} = 2 \vec{O'O} \quad \dots(8)$$

$$\begin{aligned} \text{(iii) } \vec{AO'} + \vec{O'B} + \vec{O'C} &= 2 \vec{AO'} + (\vec{O'A} + \vec{O'B} + \vec{O'C}) \\ &= 2 \vec{AO'} + 2 \vec{O'O} \quad (8) \text{ से} \\ &= 2 (\vec{AO'} + \vec{O'O}) \\ &= 2 \vec{AO} \end{aligned}$$

किन्तु AO परिणत वृत्त की त्रिज्या है, इसलिये

$$2 AO = AP = \text{व्यास के।}$$

6. सिद्ध करो कि सदिश $3a - 7b - 4c$, $3a - 2b + c$, $a + b + 2c$ समतलीय (coplanar) है।

यदि तीनों सदिश-समतलीय हैं तो किसी एक को दूसरे दो को एकघात-संचय (linear combination) में अभिव्यक्त कर सकते हैं।

माना

$$\begin{aligned} 3a - 7b - 4c &= x (3a - 2b + c) + y (a + b + 2c) \\ &= (3x + y) a - (2x - y) b + (x + 2y) c \end{aligned}$$

जबकि x और y सदिश राशी हैं :

दोनों घोर से a, b, c के गुणांकों की तुलना करने पर

$$3x + y = 3 \quad \dots(1)$$

$$2x - y = 7 \quad \dots(2)$$

$$x + 2y = -4 \quad \dots(3)$$

(1) और (2) से

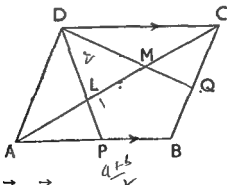
$$x = 2, y = -3$$

x और y का यह मान समीकरण (3) को भी सतुष्ट करता है। अतः तीनों सदिश समानतीय हैं।

7. समानान्तर-चतुर्भुज ABCD की भुजाओं AB व BC के मध्य बिन्दु क्रमशः P और Q हैं। सिद्ध करो कि AC और DP ऐसे बिन्दु पर काटते हैं जो इनका समन्निभाजन करता है। इसी प्रकार AC और DQ भी एक दूसरे को समन्निभाजित करते हैं। [Agra '48]

ABCD समानान्तर चतुर्भुज है।

माना A, B, C, D के स्थिति-सदिश किसी मूल बिन्दु O के सापेक्ष क्रमशः a, b, c और d हैं



$$\vec{AB} = \vec{DC}$$

$$\text{या } a - b = c - d \quad \dots(1)$$

P और Q के स्थिति-सदिश

$$\frac{a+b}{2} \text{ व } \frac{c+d}{2} \text{ होंगे}$$

DP पर, बिन्दु L ऐसा लो, जो इसका 2 : 1 के अनुपात में विभाजन करता है। तो L का स्थिति-सदिश

$$= \frac{1.d + 2 \frac{(a+b)}{2}}{3} = \frac{a+b+d}{3} \quad \dots(2)$$

इसी प्रकार जो बिन्दु CA का 2 : 1 के अनुपात में विभाजन करता है उसका स्थिति सदिश

$$= \frac{2.a + c.1}{3} = \frac{2a+c}{3} \quad \dots(3)$$

(1) और (3) से

$$\frac{2a+c}{3} = \frac{a+(b+d)}{3} = \frac{a+b+d}{3} \quad \dots(4)$$

(2) और (4) से स्पष्ट है कि L, CA व DP दोनों को 2 : 1 के अनुपात में बाँटता है। अतः DP और AC एक दूसरे का समविभाजन करते हैं।

इसी प्रकार हम सिद्ध कर सकते हैं कि AC और DQ भी एक दूसरे को समविभाजित करते हैं।



प्रश्नावली 1

1. बिन्दु A, B, C, D के स्थिति-सदिश क्रमशः $a, b, 2a + 3b$, और $a - 2b$ हैं। तो सदिश $\vec{AC}, \vec{DB}, \vec{BC}, \vec{CA}$ को a व b में अभिव्यक्त करो।
2. ABCD एक चतुर्भुज है। वल $\vec{BA}, \vec{BC}, \vec{CD}$ और \vec{DA} एक बिन्दु पर कार्य करते हैं। सिद्ध करो कि उनका परिणामित वल $\vec{2BA}$ है।
3. सिद्ध करो कि किसी त्रिभुज के तीन माध्यिकाओं द्वारा निरूपित किए ग सदिशों का सदिश-योग शून्य के बराबर है।

[समसं 63, राजस्थान 63]

4. यदि किसी षट्भुज की दो क्रमिक भुजाएँ सदिश \mathbf{a} व \mathbf{b} हों तो कम से तो 141 शेष चार भुजाओं द्वारा निरूपित किए गए सदिशों को ज्ञात करो । [राज० 62, उत्कल 53]

5. ABC एक त्रिभुज है और G उसकी मध्यिकाओं का प्रतिच्छेदन-बिन्दु है और O कोई बिन्दु है । तो सिद्ध करो कि

$$\vec{OA} + \vec{OB} + \vec{OC} = 3\vec{OG}$$

6. सिद्ध करो कि तीन बिन्दु जिनके स्थिति-सदिश \mathbf{a} , \mathbf{b} और $(3\mathbf{a} - 2\mathbf{b})$ हैं वे एकरेखिक होंगे । [राज० 54, भागरा 55, 58, दिल्ली 50]

7. सिद्ध करो कि निम्न सदिश समतलीय हैं ।

(i) $\mathbf{a} - 2\mathbf{b} + 3\mathbf{c}$, $-2\mathbf{a} + 3\mathbf{b} - 4\mathbf{c}$, $-\mathbf{b} + 2\mathbf{c}$

(ii) $\mathbf{a} + 2\mathbf{b} + 5\mathbf{c}$, $3\mathbf{a} + 2\mathbf{b} + \mathbf{c}$, $2\mathbf{a} + 2\mathbf{b} + 3\mathbf{c}$

(iii) $5\mathbf{a} + 6\mathbf{b} + 7\mathbf{c}$, $7\mathbf{a} - 8\mathbf{b} + 9\mathbf{c}$, $3\mathbf{a} + 20\mathbf{b} + 5\mathbf{c}$

जबकि \mathbf{a} , \mathbf{b} , \mathbf{c} कोई स्वेच्छ सदिश हैं ।

8. सिद्ध करो कि किसी समानान्तर-चतुर्भुज के विकर्ण एक दूसरे को समद्विभाजित करते हैं । [भागरा 63]

विलोमतः यदि किसी चतुर्भुज के विकर्ण एक दूसरे को समद्विभाजित करते हैं तो वह समानान्तर-चतुर्भुज है ।

[लखनऊ 47, पटियाला 50]

9. ABCD एक समानान्तर-चतुर्भुज है । P इसके विकर्णों का प्रतिच्छेदन बिन्दु है । यदि O कोई स्वेच्छ बिन्दु हो तो सिद्ध करो कि

$$\vec{OA} + \vec{OB} + \vec{OC} + \vec{OD} = 4\vec{OP} \quad [\text{लखनऊ 59}]$$

10. यदि A, B, C, D कोई चार बिन्दु हो तो सिद्ध करो कि सदिश-योग

$$\vec{AB} + \vec{CB} + \vec{CD} + \vec{AD} = 4\vec{EF}$$

जबकि E और F क्रमशः AC और BD के मध्यबिन्दु हैं ।

11. यदि \mathbf{a} , \mathbf{b} , \mathbf{c} , \mathbf{d} बिन्दु A, B, C, D के किसी मूलबिन्दु के सापेक्ष, स्थिति-सदिश हों और $\mathbf{b} - \mathbf{a} = \mathbf{c} - \mathbf{d}$, तो सिद्ध करो कि ABCD एक समानान्तर-चतुर्भुज है ।

[गोरखपुर 61]

12. सिद्ध करो कि यदि सदिश $(\pm a, \pm b, \pm c)$ किसी मूलबिन्दु से लिए जाएँ तो उनके सिरे एक समानान्तरकण्ठक (parallelepiped) के शीर्ष होंगे।

13. A, B, C तीन नियत (fixed) बिन्दु हैं और P एक ऐसा चर बिन्दु है कि P पर लगाए गए \vec{PA} और \vec{PB} दोनों का परिणामित वन बिन्दु C से गुजरता है। तो P का बिन्दुपथ (locus) ज्ञात करो।

[सकेत $\vec{PA} + \vec{PB} = 2\vec{PD}$; D, AB का मध्य बिन्दु है।]

14. सिद्ध करो कि आवश्यक (necessary) और पर्याप्त (sufficient) प्रतिबन्ध कि सदिश

$$r_1 = x_1i + y_1j + z_1k,$$

$$r_2 = x_2i + y_2j + z_2k,$$

$$r_3 = x_3i + y_3j + z_3k,$$

एकसात स्वतन्त्र (linearly independent) हों, यह है कि, सारणिक (determinant)

$$\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix}$$

शून्य से भिन्न है।

15. यदि सदिश a और b क्रमशः हो तो सिद्ध करो कि बिन्दु $l_1a + m_1b$ ($l=1, 2, 3$) समरेख होंगे यदि और केवल यदि (iff)

$$\begin{vmatrix} l_1 & m_1 & 1 \\ l_2 & m_2 & 1 \\ l_3 & m_3 & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

अतः सिद्ध करो कि बिन्दु

$$a - 2b + 3c, 2a + 3b - 4c, -7b + 10c \text{ एकरेख्य हैं।}$$

[नागपुर 63]

16. यदि a, b बिन्दु A, B के स्थिति-सदिश हैं और $A \parallel B$ को बढ़ा कर उन पर क्रमशः C और D बिन्दु इस प्रकार लिए गए हैं कि

$AC=3AB$ और $BD=2BA$ तो C और D के स्थिति-सदिश ज्ञान करो।

17. सिद्ध करो कि किसी त्रिभुज में दो भुजाओं के मध्य बिन्दुओं को मिलाने वाली रेखा तीसरी भुजा के समानान्तर होती है और उसकी आधी होती है। [विष्णु 62, राज० 60, लघुसूत्र 63, भागुरा 56]
18. सिद्ध करो कि किसी समबन्ध त्रिभुज में दो समानान्तर भुजाओं के मध्य बिन्दुओं को मिलाने वाली रेखा समानान्तर भुजाओं के योग की आधी होती है, और उनके समानान्तर होती है।
19. सिद्ध करो कि किसी समबन्ध त्रिभुज के विकर्णों के मध्य बिन्दुओं को मिलाने वाली रेखा समानान्तर रेखाओं के अन्तर की आधी होती है और उनके समानान्तर होती है।
20. सदिश विधि द्वारा सिद्ध करो कि किसी समानान्तर त्रिभुज की सम्मुख भुजाएँ समान होती हैं और विकर्ण एक दूसरे को समद्विभाजित करते हैं। (लघुसूत्र 57, 63, भागुरा 63)

1.17 सदिश का विघटन (Resolution of a Vector)

हम अनुच्छेद 1.16 में देख चुके हैं कि किसी भी सदिश को किन्हीं तीन स्वतंत्र अवयव-सदिशों a, b, c में अभिव्यक्त कर सकते हैं जैसे

$$r = xa + yb + zc$$

यहाँ हम ऐसी स्थिति का विचार करेंगे जिनमें तीन अवयव-सदिश परस्पर अभिलम्ब हों।

एक दृष्टिकोण-निर्देशक-पद्धति OX, OY, OZ लो। इन पक्षों की दिशा में इकाई सदिश i, j, k वनः OX, OY, OZ के समानान्तर हैं।

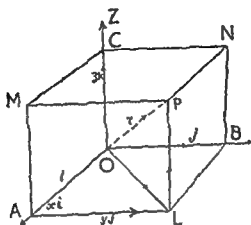
P कोई बिन्दु है और $\vec{OP} = r$, OP को विकर्ण मान कर समानान्तर-फलक (Parallelepiped) $OALBCMPN$ गीचो।

माना $OA = x$, $OB = y$ और $OC = z$

$$\vec{OA} = x\vec{i}$$

$$\vec{OB} = y\vec{j}$$

$$\vec{OC} = \vec{LP} = zk.$$



$$\vec{OP} = \vec{OL} + \vec{LP}.$$

$$= \vec{OA} + \vec{AL} + \vec{LP}.$$

$$= xi + yj + zk.$$

....(1)

अतः दिया हुआ सदिश $\vec{OP} = r$ निम्न प्रकार से अभिव्यक्त किया जा सकता है :—

$$r = xi + yj + zk$$

....(2)

जबकि x, y, z बिन्दु P के निर्देशांक हैं

त्रिविमतीय—(3-dimensional) सदिश \vec{OP} को वास्तविक संख्याओं के क्रमबद्ध समुदाय (ordered aggregate) द्वारा भी अभिव्यक्त किया जा सकता है। सदिश r को हम (x, y, z) भी लिख सकते हैं।

घटक-सदिश xi, yj, zk सदिश r के i, j, k दिशाओं में लम्बवत् प्रक्षेप हैं। और $x, y, z, OP (=r)$ के आयतीय-घटक हैं। इनको अवशेष (Residue) या विभोजित (Resolute) के नाम भी दिए गए हैं; और इकाई सदिश i, j, k को लम्ब-प्रसामान्यक (ortho-normal) इकाई त्रयी (triads) के नाम से भी लिखा जाता है।

पुनः

$$\begin{aligned} OP^2 &= PL^2 + OL^2 = OA^2 + AL^2 + PL^2 \\ &= x^2 + y^2 + z^2 \end{aligned}$$

$$\text{या } |OP^2| = r^2 = x^2 + y^2 + z^2 \quad \dots(3)$$

अर्थात् किसी सदिश के मापांक का वर्ग उसके आयतीय-प्रवचकों के वर्गों के योग के बराबर होता है।

यदि

$$= x_t i + y_t j + z_t k \quad (t=1, 2, \dots, n)$$

$$\text{तो } \sum_1^n = \left(\sum_1^n x_t\right) i + \left(\sum_1^n y_t\right) j + \left(\sum_1^n z_t\right) k \quad \dots(4)$$

अर्थात् \sum_1^n का i दिशा में घटक $\sum_1^n x_t$ है।

परिणाम (4) का निम्न प्रकार से भी वर्णन किया जा सकता है।

किसी भी दिशा में किन्हीं सदिशों के योग का वियोजित भाग उसी दिशा में सदिशों के व्यक्तिगत वियोजित भागों के योग के समान होता है।

उपर्युक्त प्रमेय में हम वियोजित भाग के स्थान पर किसी भी "समतल पर प्रक्षेप" का भी प्रयोग कर सकते हैं।

1.18 दिक्कोज्या (Direction Cosines)

माना \vec{OP} ; OX, OY, OZ या i, j, k की दिशाओं के साथ क्रमशः कोण α, β, γ बनाता है। और $OP = r$

$$\left. \begin{aligned} x &= OP \cos \alpha = r \cos \alpha \\ y &= OP \cos \beta = r \cos \beta \\ z &= OP \cos \gamma = r \cos \gamma \end{aligned} \right\} \quad \dots(1)$$

$$\text{किन्तु } r^2 = x^2 + y^2 + z^2$$

$$\therefore \cos \alpha = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} = \frac{x}{r}$$

$$\cos \beta = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} = \frac{y}{r}$$

$$\cos \gamma = \frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} = \frac{z}{r}$$

घन-न्यायमिति में $\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma$ को OP के अक्ष OX, OY, OZ के साथ दिक्कोज्या कहते हैं और इनको l, m, n से चिह्नित किया जाता है। एक अक्षर बिन्दु के लिए OP , अर्थात् r निश्चिन होना तो दिक्कोज्या

x, y, z के समानुपाती होंगे। इसलिए x, y, z , OP की दिशा-अनुपात (direction ratios) कहलाते हैं।

यह स्पष्ट है कि r की दिशा में इकाई सदिश \hat{r} , निम्न विधि से होगा—

$$\hat{r} = r/r = \cos\alpha \hat{i} + \cos\beta \hat{j} + \cos\gamma \hat{k}$$

1.19 किन्हीं दो बिन्दुओं, $P_1 (x_1, y_1, z_1)$ और $P_2 (x_2, y_2, z_2)$ के बीच की दूरी ज्ञात करना और उनको मिलाने वाली रेखा $P_1 P_2$ के दिक्कोज्या निकालना (To find the distance between two points and direction cosines of the line joining them)

माना P_1, P_2 के स्थिति-सदिश किसी मूलबिन्दु O के सापेक्ष r_1, r_2 हैं

$$\vec{OP}_1 = r_1 = x_1 \hat{i} + y_1 \hat{j} + z_1 \hat{k} \quad \dots(1)$$

$$\vec{OP}_2 = r_2 = x_2 \hat{i} + y_2 \hat{j} + z_2 \hat{k} \quad \dots(2)$$

$$\begin{aligned} \therefore \vec{P_1 P_2} &= \vec{OP}_2 - \vec{OP}_1 = r_2 - r_1 \\ &= (x_2 - x_1) \hat{i} + (y_2 - y_1) \hat{j} + (z_2 - z_1) \hat{k} \quad \dots(3) \end{aligned}$$

$$\text{अतः } |\vec{P_1 P_2}| = \{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2\}^{\frac{1}{2}} \quad \dots(4)$$

समीकरण (4) किन्हीं दो बिन्दुओं के बीच की दूरी का उनके कार्तीय (Cartesian coordinates) निर्देशांकों में ज्ञात करने का सूत्र है।

यह स्पष्ट है कि $P_1 P_2$ के दिशा-अनुपात i, j, k के गुणांक हैं। अर्थात् $(x_2 - x_1), (y_2 - y_1)$, और $(z_2 - z_1)$ हैं।

अतः $P_1 P_2$ के दिक्कोज्या (D.C.)=

$$\frac{x_2 - x_1}{\sqrt{(x_2 - x_1)^2}}, \frac{y_2 - y_1}{\sqrt{(y_2 - y_1)^2}}, \frac{z_2 - z_1}{\sqrt{(z_2 - z_1)^2}}$$

1.20 दो सदिशों के बीच का कोण ज्ञात करना (To find the angle between two vectors)

किसी मूलबिन्दु O के सापेक्ष, माना दो बिन्दु P_1, P_2 के स्थिति-सदिश r_1, r_2 हैं और उनके निर्देशक क्रमशः $(x_1, y_1, z_1), (x_2, y_2, z_2)$

$$\text{तो } \vec{OP_1} = r_1 = x_1 \mathbf{i} + y_1 \mathbf{j} + z_1 \mathbf{k}$$

$$\vec{OP_2} = r_2 = x_2 \mathbf{i} + y_2 \mathbf{j} + z_2 \mathbf{k}$$

$$P_1 P_2 = |r_2 - r_1| = \sqrt{\Sigma (x_2 - x_1)^2}$$

माना r_1 और r_2 के बीच का कोण θ है। तो

$$P_1 P_2^2 = OP_1^2 + OP_2^2 - 2OP_1 \cdot OP_2 \cos \theta$$

$$\text{या } \cos \theta = \frac{r_1^2 + r_2^2 - |P_1 P_2|^2}{2r_1 r_2}$$

$$\left. \begin{aligned} \text{किन्तु } r_1^2 &= r_1^2 = x_1^2 + y_1^2 + z_1^2 \text{ और } \\ r_2^2 &= r_2^2 = x_2^2 + y_2^2 + z_2^2 \end{aligned} \right\} \quad \dots (2)$$

(1) और (2) से

$$\begin{aligned} \cos \theta &= \frac{\Sigma x_1^2 + \Sigma x_2^2 - \Sigma (x_2 - x_1)^2}{2\sqrt{\Sigma x_1^2} \cdot \sqrt{\Sigma x_2^2}} \\ &= \frac{x_1 x_2 + y_1 y_2 + z_1 z_2}{r_1 r_2} \quad \dots (3) \end{aligned}$$

यदि $(l_1, m_1, n_1), (l_2, m_2, n_2), \vec{OP_1}$ और $\vec{OP_2}$ के दिक्कोण्य हो तो

$$l_1 = \frac{x_1}{r_1}, \quad m_1 = \frac{y_1}{r_1}, \quad n_1 = \frac{z_1}{r_1} \text{ और}$$

$$l_2 = \frac{x_2}{r_2}, \quad m_2 = \frac{y_2}{r_2}, \quad n_2 = \frac{z_2}{r_2}$$

$$\text{अतः } \cos \theta = l_1 l_2 + m_1 m_2 + n_1 n_2 \quad \dots (4)$$

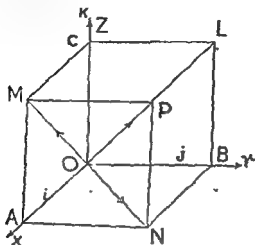
समीकरण (4) से हम $\sin \theta$ और $\tan \theta$ का मान भी प्राप्त कर सकते हैं।

उदाहरण 1:—

तीन सदिश, जिनके परिमाण $a, 2a, 3a$ हैं, एक ही बिन्दु पर मिलते

हैं; और उनकी दिशाएँ एक घन के तीन आसन्न तलों के विकर्णों की हों तो उनका परिणामित ज्ञात करो।

[सखनऊ 51, 58, व. हि. वि. 54, दिल्ली 62]



हल:—

माना सदिश a , $2a$ और $3a$ घन OANBC LPM के विकर्ण OL, OM और ON की दिशाओं में हैं। और OX, OY, OZ की दिशाओं में इकाई सदिश i , j , k हैं। तो

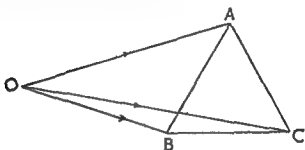
$$\left. \begin{aligned} \vec{OL} &= \frac{a}{\sqrt{2}}\mathbf{j} + \frac{a}{\sqrt{2}}\mathbf{k} \\ \vec{OM} &= \frac{2a}{\sqrt{2}}\mathbf{i} + \frac{2a}{\sqrt{2}}\mathbf{k} \\ \vec{ON} &= \frac{3a}{\sqrt{2}}\mathbf{i} + \frac{3a}{\sqrt{2}}\mathbf{j} \end{aligned} \right\} \dots(1)$$

$$\begin{aligned} \text{योग करने पर परिणामित } \vec{r} &= \vec{OL} + \vec{OM} + \vec{ON} \\ &= \frac{5a}{\sqrt{2}}\mathbf{i} + \frac{4a}{\sqrt{2}}\mathbf{j} + \frac{3a}{\sqrt{2}}\mathbf{k} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \vec{r} \text{ का मापक } r &= \sqrt{\frac{25a^2}{2} + \frac{16a^2}{2} + \frac{9a^2}{2}} = 5a \end{aligned}$$

2. यदि किसी त्रिभुज के शीर्ष $a_1\mathbf{i} + a_2\mathbf{j} + a_3\mathbf{k}$; $b_1\mathbf{i} + b_2\mathbf{j} + b_3\mathbf{k}$, $c_1\mathbf{i} + c_2\mathbf{j} + c_3\mathbf{k}$ हों तो भुजाओं द्वारा निरूपित किए गए सदिशों को ज्ञात करो, और भुजाओं की लम्बाई भी ज्ञात करो। [सूत्रनं 53, पञ्चाद 56, विक्रम 62, कर्नाटक 62]

माना किसी मूलबिन्दु O के सापेक्ष A, B, C के स्थिति-सदिश



$$\vec{OA} = a_1\mathbf{i} + a_2\mathbf{j} + a_3\mathbf{k}$$

$$\vec{OB} = b_1\mathbf{i} + b_2\mathbf{j} + b_3\mathbf{k}$$

$$\vec{OC} = c_1\mathbf{i} + c_2\mathbf{j} + c_3\mathbf{k} \text{ हैं।}$$

$$\begin{aligned} \vec{AB} &= \vec{OB} - \vec{OA} = (b_1\mathbf{i} + b_2\mathbf{j} + b_3\mathbf{k}) - (a_1\mathbf{i} + a_2\mathbf{j} + a_3\mathbf{k}) \\ &= (b_1 - a_1)\mathbf{i} + (b_2 - a_2)\mathbf{j} + (b_3 - a_3)\mathbf{k} \quad \dots (1) \end{aligned}$$

इसी प्रकार

$$\vec{BC} = (c_1 - b_1)\mathbf{i} + (c_2 - b_2)\mathbf{j} + (c_3 - b_3)\mathbf{k} \quad \dots (2)$$

$$\text{और } \vec{CA} = (a_1 - c_1)\mathbf{i} + (a_2 - c_2)\mathbf{j} + (a_3 - c_3)\mathbf{k} \quad \dots (3)$$

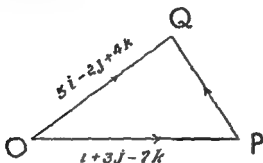
$$\text{भुजा } AB = |\vec{AB}| = \sqrt{\Sigma (b_1 - a_1)^2};$$

$$BC = |\vec{BC}| = \sqrt{\Sigma (c_1 - b_1)^2};$$

$$CA = |\vec{CA}| = \sqrt{\Sigma (a_1 - c_1)^2}.$$

3. यदि P और Q के स्थिति-सदिश क्रमशः $\mathbf{i} + 3\mathbf{j} - 7\mathbf{k}$ और

$5\mathbf{i} - 2\mathbf{j} + 4\mathbf{k}$ हो तो सदिश \vec{PQ} का मान तथा उसके दिक्कोण ज्ञात करो।
माना मूलबिन्दु O है।



$$\vec{OP} = \mathbf{i} + 3\mathbf{j} - 7\mathbf{k}$$

$$\vec{OQ} = 5\mathbf{i} - 2\mathbf{j} + 4\mathbf{k}$$

$$\vec{PQ} = \vec{OQ} - \vec{OP}$$

$$= (5\mathbf{i} - 2\mathbf{j} + 4\mathbf{k}) - (\mathbf{i} + 3\mathbf{j} - 7\mathbf{k})$$

$$= 4\mathbf{i} - 5\mathbf{j} + 11\mathbf{k}$$

(1)

$$PQ \text{ का मापांक} = \sqrt{4^2 + 5^2 + 11^2} = 9\sqrt{2}$$

$\therefore PQ$ के दिक्कोण

$$= \frac{4}{9\sqrt{2}}, \frac{-5}{9\sqrt{2}}, \frac{11}{9\sqrt{2}} \text{ होंगे।}$$

$$[\text{चूँकि } \cos \alpha = \frac{x}{r} \text{ इत्यादि}]$$

4. सदिश \mathbf{a} और \mathbf{b} के बीच के कोण का ज्या (sine) ज्ञात करें
जबकि $\mathbf{a} = 3\mathbf{i} + \mathbf{j} + \mathbf{k}$ और $\mathbf{b} = 2\mathbf{i} - 2\mathbf{j} + 4\mathbf{k}$ [समसूत्र, 60]

$$\text{हल: } \mathbf{a} \text{ का परिमाण} = \sqrt{3^2 + 1^2 + 1^2} = \sqrt{11} \quad \dots(1)$$

$$\mathbf{b} \text{ का परिमाण} = \sqrt{2^2 + 2^2 + 4^2} = 2\sqrt{6} \quad \dots(2)$$

$$a \text{ के दिक्कोज्या} = \left(\frac{3}{\sqrt{11}}, \frac{1}{\sqrt{11}}, \frac{1}{\sqrt{11}} \right) \therefore \dots (3)$$

$$\begin{aligned} b \text{ के दिक्कोज्या} &= \left(\frac{2}{2\sqrt{6}}, \frac{-2}{2\sqrt{6}}, \frac{2}{2\sqrt{6}} \right) \\ &= \left(\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{-1}{\sqrt{6}}, \frac{2}{\sqrt{6}} \right) \end{aligned} \quad (4)$$

माना a और b के बीच का कोण θ है। तो

$$\begin{aligned} \cos \theta &= \Sigma l_1 l_2 \\ &= \frac{3 \cdot 1 - 1 \cdot 1 + 2 \cdot 1}{\sqrt{66}} = \frac{4}{\sqrt{66}} \end{aligned} \quad \dots (5)$$

$$\therefore \sin \theta = \sqrt{1 - \frac{16}{66}} = \frac{5}{\sqrt{33}} \quad \dots (6)$$

प्रश्नावली 2

- किसी त्रिभुज ABC के शीर्ष $A(2, -1, -3)$; $B(4, 2, 3)$; $C(6, 3, 4)$ हैं। सिद्ध करो कि $\vec{AB} = (2, 3, 6)$ और $\vec{AC} = (4, 4, 7)$ हैं और उनकी लम्बाई क्रमशः 7 व 9 हैं। उनके दिक्कोज्या ज्ञात करो।
- A, B, C, D बिन्दुओं के स्थिति-सदिश क्रमशः $2\mathbf{i} + 3\mathbf{j} + 5\mathbf{k}$; $\mathbf{i} + 2\mathbf{j} + 3\mathbf{k}$; $-5\mathbf{i} + 4\mathbf{j} - 2\mathbf{k}$ और $\mathbf{i} + 10\mathbf{j} + 10\mathbf{k}$ हैं। तो सिद्ध करो कि AB रेखा CD के समानान्तर है।
- सिद्ध करो कि बिन्दु $\mathbf{i} + 2\mathbf{j} + 3\mathbf{k}$, $2\mathbf{i} + 3\mathbf{j} + \mathbf{k}$, $3\mathbf{i} + \mathbf{j} + 2\mathbf{k}$ एक समबाहु त्रिभुज बनाते हैं।

4. सिद्ध करो कि तीन बिन्दु जिनके स्थिति-सदिश क्रमशः $3i - 2j + 4k$, $i + j + k$, $-i + 4j - 2k$ हैं एक रेखास्थ है।
[संकेत : AC को BA : 1 के अनुपात में बाँटता है]
5. यदि P, Q, R, S के स्थिति-सदिश $2i + 4k$, $5i + 3/3j + 4k$, $-2\sqrt{3}j + k$, $2i + k$ हैं तो सिद्ध करो कि RS, PQ के समानान्तर है और $\frac{2}{3}$ PQ के बराबर है। [गोरखपुर 62]
6. त्रिभुज ABC का परिमाण ज्ञात करो जिसके शीर्ष $(3, 1, 5)$, $(-1, -1, 9)$ और $(0, -5, 1)$ हैं।
7. यदि दो सदिश समानान्तर हों तो सिद्ध करो कि एक के घटक दूसरे के घटकों के समानुपाती होंगे। अन्यथा सिद्ध करो कि बिन्दु $(i - 2j - 8k)$, $(5i - 2k)$ और $(11i + 3j + 7k)$ समरेख हैं। और यह भी ज्ञात करो कि B, AC को किस अनुपात में बाँटता है।
(राज. 1961)
8. त्रिभुज ABC की भुजाओं की लम्बाई ज्ञात करो जिसके शीर्ष $A(2, 4, -1)$, $B(4, 5, 1)$, $C(3, 6, -3)$ हैं। सिद्ध करो कि त्रिभुज समकोणिक है। AB के दिक्कोण (d.c) ज्ञात करो।
(राज. 66)
9. बिन्दु D, E, F त्रिभुज ABC की भुजाओं BC, CA, AB को क्रमशः $1 : 4$, $3 : 2$, और $3 : 7$ के अनुपात में बाँटते हैं तो सिद्ध करो कि सदिशों \vec{AD} , \vec{BE} , \vec{CF} का योग सदिश \vec{CK} के समानान्तर है। जबकि K, AB को $1 : 3$ के अनुपात में बाँटता है।

केन्द्रक तथा प्रारम्भिक भौतिक अनुप्रयोग

2.1 केन्द्रक (Centroid)

माना n बिन्दु जिनके मूलबिन्दु O के सापेक्ष स्थिति-सदिश a, b, c, \dots हैं सो बिन्दु G जिसका स्थिति-सदिश

$$\vec{OG} = \frac{1}{n} (a + b + c + \dots) \quad \dots (1)$$

है इनका केन्द्रक (Centroid) कहलाता है। इसे माध्य-केन्द्र (mean centre) भी कहते हैं। इस परिभाषा को निम्न रूप से व्यापक बनाया जा सकता है।

यदि n बिन्दु A, B, C, \dots जिनकी सहचरी-संख्या (associated-number) p, q, r, \dots हैं (जिनका योग शून्य न हो) तो बिन्दु G जिसका स्थिति-सदिश

$$\vec{OG} = r = \frac{pa + qb + rc + \dots}{p + q + r + \dots}, \quad \dots (2)$$

है, उन बिन्दुओं का सहचारी संख्या p, q, r, \dots से सम्बन्धित केन्द्रक कहलाता है।

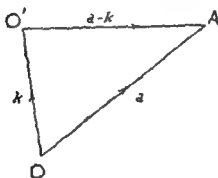
विशेष स्थिति में, दो बिन्दु A, B का केन्द्रक जिनकी सहचारी-संख्या p, q हैं, AB को $q : p$ के अनुपात में बाटता है। क्योंकि

$$OG' = \frac{pa + qb}{p + q} \quad \dots (3)$$

प्रमेय .1. केन्द्रक मूल-बिन्दु की स्थिति पर निर्भर नहीं होता।

माना बिन्दु A, B, C, \dots के स्थिति-सदिश, मूलबिन्दु O के सापेक्ष a, b, c, \dots हैं। और O' एक ऐसा बिन्दु है जिसका O के सापेक्ष स्थिति-सदिश \mathbf{k} है। अब O' को नया मूल-बिन्दु माना तो बिन्दु A, B, C, \dots के मूलबिन्दु O' के सापेक्ष स्थिति-सदिश क्रमशः $a - k, b - k, c - k, \dots$ हैं।

यदि अब A, B, C, \dots का केन्द्रक G' है तो



$$\begin{aligned} \vec{O'G'} &= \frac{p(a - k) + q(b - k) + r(c - k) + \dots}{p + q + r + \dots} \\ &= \frac{pa + qb + rc + \dots}{p + q + r} - k. \\ &\xrightarrow{\quad} = \vec{OG} - k = \vec{O'G}. \end{aligned}$$

अतः बिन्दु G', G पर संपाती है और केन्द्रक मूलबिन्दु की स्थिति से स्वतन्त्र है।

प्रमेय 2, यदि G_1 , एक बिन्दु-पद्धति A, B, C, \dots का केन्द्रक है जिनकी सहचर-संख्या p, q, r हैं और G_2 दूसरी पद्धति A', B', C', \dots का केन्द्रक है और इनके सहचर-घंक p', q', r' हैं। तो सब बिन्दुओं का केन्द्रक G दो बिन्दुओं G_1, G_2 का केन्द्रक होगा और उनके सहचर-घंक $(p + q + r + \dots)$ और $(p' + q' + r' + \dots)$ हैं।

माना मूल-बिन्दु O है। तो

$$\vec{OG}_1 = \frac{p.a + q.b + r.c + \dots}{p + q + r + \dots} = \frac{\sum p a}{\sum p} \quad \dots (4)$$

$$\vec{OG}_2 = \frac{p' \vec{a}' + q' \vec{b}' + r' \vec{c}' + \dots}{p' + q' + r' + \dots} = \frac{\sum p' \vec{a}'}{\sum p'} \quad \dots(5)$$

यदि G_1, G_2 के सहचर बिन्दु $\sum p$, और $\sum p'$ हो तो उनका केन्द्रक G एक ऐसा बिन्दु होगा कि

$$\begin{aligned} \vec{OG} &= \frac{\vec{OG}_1 \sum p + \vec{OG}_2 \sum p'}{\sum p + \sum p'} \\ &= \frac{p \vec{a} + q \vec{b} + r \vec{c} + \dots + p' \vec{a}' + q' \vec{b}' + r' \vec{c}' + \dots}{\sum p + \sum p'} \end{aligned} \quad \dots(6)$$

(6) से स्पष्ट है कि G सब बिन्दुओं की संयुक्त पद्धति का केन्द्रक है।

यह प्रमेय किन्हीं उप-पद्धतियों के लिए भी सत्य है। प्रत्येक पद्धति के केन्द्रक को एक बिन्दु द्वारा व्यक्त करके उसका सहचर अंक उस उप-पद्धति के सहचर अंकों का योग होगा, अर्थात् $\sum p$ ।

2.2 संहति-केन्द्र (mass-centre).

यदि कई वस्तु जिनकी संहति m_1, m_2, m_3, \dots है, और ऐसे बिन्दुओं पर स्थित हैं जिनके स्थिति-सदिश क्रमशः $\vec{r}_1, \vec{r}_2, \vec{r}_3, \dots$ हैं तो उनका संहति-केन्द्र (mass-centre) उन बिन्दुओं का केन्द्र होगा व उनके सहचर-अंक m_1, m_2, m_3, \dots होंगे। अतः किसी भी पद्धति में संहति-केन्द्र ऐसा बिन्दु G है कि

$$\vec{OG} = \vec{r} = \frac{m_1 \vec{r}_1 + m_2 \vec{r}_2 + m_3 \vec{r}_3 + \dots}{m_1 + m_2 + m_3 + \dots} \quad \dots(1)$$

समीकरण (1) में यदि G के निर्देशांक दिए हुए हों तो हम इससे अदिश समीकरण का निगमन (deduction) कर सकते हैं।

माना बिन्दु $(x_1, y_1, z_1), (x_2, y_2, z_2), (x_3, y_3, z_3), \dots$ पर संहति-कण m_1, m_2, m_3, \dots स्थित हैं। और आयतीय निर्देशांक पद्धति (system of rectangular-coordinates) OX, OY, OZ में यदि मूल बिन्दु O है। और $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ क्रमशः OX, OY, OZ की दिशाओं में इकाई सदिश हैं। तो

$$\mathbf{r}_1 = x_1\mathbf{i} + y_1\mathbf{j} + z_1\mathbf{k},$$

$$\mathbf{r}_2 = x_2\mathbf{i} + y_2\mathbf{j} + z_2\mathbf{k},$$

$$\mathbf{r}_3 = x_3\mathbf{i} + y_3\mathbf{j} + z_3\mathbf{k},$$

माना केन्द्रक G के निर्देशांक (\bar{x} , \bar{y} , \bar{z} हैं) तो

$$\vec{OG} = \bar{x}\mathbf{i} + \bar{y}\mathbf{j} + \bar{z}\mathbf{k}, \quad \dots\dots\dots(2)$$

केन्द्रक के सूत्र से

$$\begin{aligned} \vec{OG} &= \bar{x}\mathbf{i} + \bar{y}\mathbf{j} + \bar{z}\mathbf{k} = \frac{\sum m_1(x_1\mathbf{i} + y_1\mathbf{j} + z_1\mathbf{k})}{\sum m_1} \\ &= \frac{\sum(m_1x_1)\mathbf{i} + \sum(m_1y_1)\mathbf{j} + \sum(m_1z_1)\mathbf{k}}{\sum m_1} \quad \dots\dots\dots(3) \end{aligned}$$

(3) में दोनों ओर $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$ के गुणांको की तुलना करने से

$$\left. \begin{aligned} \bar{x} &= \frac{\sum(m_1x_1)}{\sum m_1}, \\ \bar{y} &= \frac{\sum(m_1y_1)}{\sum m_1}, \\ \bar{z} &= \frac{\sum(m_1z_1)}{\sum m_1}. \end{aligned} \right\} \quad \dots\dots(4)$$

2.3 स्थिति-सदिशों में एकघात-सम्बन्ध : (Linear relation between position vectors)

सिद्ध करो कि यदि बिन्ही स्थिर-बिन्दुओं के स्थिति-सदिशों में एकघात-सम्बन्ध (linear relation), मूल-बिन्दु की स्थिति से स्वतन्त्र हो तो उसके लिए आवश्यक और पर्याप्त प्रतिबंध यह होगा कि उनके गुणांकों का बीजीय योग शून्य होना चाहिए

या

सिद्ध करो कि सम्बन्ध

$$m_1\mathbf{a}_1 + m_2\mathbf{a}_2 + m_3\mathbf{a}_3 + \dots = 0 \quad \dots\dots(1)$$

[m_1, m_2, m_3, \dots सदिश हैं]

मूलबिन्दु की स्थिति से स्वतन्त्र होगा यदि और केवल यदि (if and only if)

$$m_1 + m_2 + m_3 + \dots = 0 \quad \dots (2)$$

माना A_1, A_2, \dots, A_n , n बिन्दु हैं जिनके स्थिति-सदिश किसी मूल-बिन्दु O के सापेक्ष a_1, a_2, a_3, \dots हैं और

$$\sum m_i a_i = 0$$

माना नया मूलबिन्दु O' है और इसका O के सापेक्ष स्थिति-सदिश \mathbf{k} है। तो बिन्दुओं A_1, A_2, \dots, A_n के O' के सापेक्ष स्थिति-सदिश क्रमशः

$$a_1 - k, a_2 - k, a_3 - k, \dots \text{ हैं।} \quad \dots (3)$$

(1) प्रतिबन्ध आवश्यक है। (The condition is necessary.)

दिया हुआ है कि सदिशों के बीच का (1) के आकार का सम्बन्ध मूल-बिन्दु की स्थिति से उदासीन है। तो हमें सिद्ध करना है कि $\sum m_i = 0$.

उपर्युक्त प्रतिबन्ध से

$$m_1 (a_1 - k) + m_2 (a_2 - k) + m_3 (a_3 - k) + \dots = 0$$

$$\text{या } (m_1 a_1 + m_2 a_2 + \dots + m_n a_n) - (m_1 + m_2 + \dots + m_n) k = 0 \quad \dots (4)$$

(1) और (4) से

$$m_1 + m_2 + \dots + m_n = 0. \quad \dots (5)$$

अतः प्रतिबन्ध आवश्यक है।

(2) प्रतिबन्ध पर्याप्त है। (The Condition is sufficient)

दिया हुआ है कि

$$\sum m_i a_i = 0, \dots (1), \quad \sum m_i = 0 \quad \dots (6)$$

माना मूलबिन्दु को O से O' में बदलने पर (1) में

$$m_1 (a_1 - k) + m_2 (a_2 - k) + \dots = 0$$

या (1) और (6) से

$$(m_1 a_1 + m_2 a_2 + \dots + m_n a_n) - (m_1 + m_2 + \dots + m_n) k \\ = 0 - 0 = 0. \quad (k \text{ के सब मान के लिए})$$

अतः प्रतिबन्ध पर्याप्त है।

नोट:—अनुच्छेद 2.1 से केन्द्रक G से

$$\vec{OG} = \vec{r} = \frac{pa + qb + rc + \dots}{p + q + r + \dots}$$

$$\text{या } pa + qb + rc + \dots - (p + q + r + \dots) \vec{r} = 0.$$

गुणांकों का योग

$$= p + q + r + \dots - (p + q + r + \dots) = 0.$$

इस प्रकार केन्द्रक मूल-बिन्दु की स्थिति से स्वतन्त्र है।

2.4 कुछ साधारण भौतिक अनुप्रयोग।

(Some simple Physical Applications.)

अब हम यान्त्रिकी (mechanics) में सदिशों के कुछ प्रारम्भिक अनुप्रयोगों पर विचार करेंगे।

(1) विस्थापन और वेग (displacement and velocity)

विस्थापन का मान और दिशा दोनों होते हैं। इसलिए यह सदिश राशि है। किसी बिन्दु A से B तक का विस्थापन सदिश \vec{AB} द्वारा निरूपित किया जा सकता है। यदि एक कण A से B तथा B से C तक विस्थापित होता है तो अन्तिम विस्थापन सदिश-योग \vec{AC} द्वारा दिखाया जा सकता है।

अर्थात्

$$\vec{AB} + \vec{BC} = \vec{AC}.$$

यदि दो बिन्दु P और Q दोनों ही गतिमान हों तो उनके बीच की परस्पर दूरी एक सदिश राशि है, जो सदिश \vec{PQ} द्वारा निरूपित की जा सकती है। P के सापेक्ष Q की स्थिति निम्न प्रकार से होगी।

$$\vec{OQ} = \vec{OP} + \vec{PQ}.$$

किसी कालान्तर में Q का P के सापेक्ष विस्थापन उनकी परस्पर स्थिति में उस कालान्तर में परिवर्तन के बराबर होगा। यदि किसी

निश्चित होती है। यदि इसके कार्य करने की रेखा में परिवर्तन किया जाए तो इसका प्रभाव भी बदल जाता है। परन्तु दो संगामी बलों का गतिज प्रभाव एक ही सदिश, उनका सदिश-योग, के प्रभाव के बराबर होता है, जो इनका परिणामित बल होता है और उसी बिन्दु पर कार्य करता है। यदि कुछ बल $F_1, F_2 \dots F_n$ किसी वस्तु पर कार्य करें और उनकी कार्य-दिशाएँ एक ही बिन्दु P पर संगामी हों तो उन सब बलों के समान एक ही बल

$$R = F_1 + F_2 + \dots + F_n = \Sigma F$$

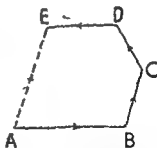
इन बलों की पद्धति का परिणामित-बल (Resultant) कहलाता है। परिणामित बल R, सदिश-बहुभुज द्वारा भी ज्ञात किया जाता है। अर्थात् ऐसा बहुभुज जिसकी भुजाओं की लम्बाई और दिशाएँ सदिश F_1, F_2, \dots, F_n के समान हों और $F_2, F_3, F_4 \dots$ के प्रारम्भिक सिरे क्रमशः F_1, F_2, F_3, \dots के अन्तिम सिरे होते हैं। साधारणतया यह बहुभुज बन्द या एक ही समतल में नहीं होता जबतक कि बल संतुलन-प्रवस्था में या समतलीय न हों।

बहुभुज का यदि \vec{AB} प्रथम सदिश है और \vec{DE} अन्तिम सदिश है तो,

परिणामित सदिश \vec{AE} होगा

$$R = \vec{AE} = \Sigma F.$$

यदि सब बलों का सदिश-योग शून्य हो तो बहुभुज बन्द होगा। उस अवस्था में बलों का परिणामित भी शून्य होगा और वस्तु साम्यावस्था में रहेगी। यदि परिणामित बल शून्य हो तो किन्हीं तीन दिशाओं में बलों के घटकों का पृथक्-पृथक् योग शून्य होगा। इसके विलोमतः यदि किन्हीं तीन दिशाओं में बलों के घटकों का योग शून्य है



तो उनका परिणामित बल भी शून्य होगा। या बल संतुलन अवस्था में होंगे। अतः किसी बिन्दु पर कार्य करने वाले बल यदि संतुलन अवस्था में हों तो उसके लिए आवश्यक और पर्याप्त प्रतिबन्ध यह है कि बलों के किन्हीं तीन असमतलीय दिशाओं में घटकों का पृथक्-पृथक् योग शून्य होना चाहिए।

(3) लामी प्रमेय (Lami's Theorem)

विशेष रूप से यदि उपर्युक्त दिष्ट-बहुभुज में तीन बल संतुलन अवस्था में हों तो बहुभुज त्रिभुज हो जाएगा। सदिश F_1, F_2, F_3 तब समतलीय होंगे और प्रत्येक, दूसरे दो सदिशों के बीच के कोण के ज्या (sine) के समानुपाती होगा।

माना $A_1, A_2 \dots A_n, n$ बिन्दु हैं जिनके स्थिति-सदिश किसी मूल-बिन्दु O के सापेक्ष $r_1, r_2, r_3 \dots r_n$ हैं। तो उनका परिणामित-सदिश R है,

$$\begin{aligned} R = \Sigma F &= \vec{OA}_1 + \vec{OA}_2 + \dots \vec{OA}_n \\ &= n \vec{OG}. \end{aligned}$$

जबकि $G, A_1, A_2 \dots A_n$ का केन्द्रक है। यदि बिन्दु G, O पर सपाती हों अर्थात् यदि मूल-बिन्दु ही केन्द्रक हो तो बल संतुलन-अवस्था में होंगे।

उदाहरण नं० 1. एक व्यक्ति पूर्व की ओर 8 कि०मी० प्रति घंटा की गति से जा रहा है। उसे प्रतीत होना है कि वायु सीधी उत्तर की ओर में आ रही है। वह अपनी गति को दुगुना कर लेता है तो वायु की दिशा उत्तर-पूर्व से प्रतीत होती है। वायु की गति ज्ञात करो [रात्र० 63, लखनऊ 61]

माना 1 और 2 क्रमशः पूर्व (\vec{OE}) और उत्तर (\vec{ON}) की दिशाओं में एक कि० मी० प्रति घंटा की गति निरूपित करते हैं।

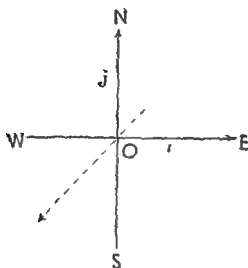
$$\text{व्यक्ति की गति} = 8\vec{i} + 0\vec{j} \quad \dots (1)$$

$$\text{माना वायु की गति} = x\vec{i} + y\vec{j} \quad \dots (2)$$

व्यक्ति के सम्बन्ध में वायु की सापेक्ष-गति

$$\begin{aligned} &= (x\vec{i} + y\vec{j}) - (8\vec{i} + 0\vec{j}) \\ &= (x - 8)\vec{i} + y\vec{j} \quad \dots (3) \end{aligned}$$

परन्तु यह दिया हुआ है कि सापेक्ष-गति की दिशा उत्तर की ओर से है,



अर्थात्— j के समान्तर है। इसलिए

(3) में i का गुणांक शून्य होगा।

$$\therefore 8 - x = 0$$

$$\text{या } x = 8. \quad \dots(4)$$

अब व्यक्ति ने अपनी गति को दुगुना कर दिया, इसलिए अब गति

$$= 16i + 0j. \quad \dots(5)$$

वायु की अब सापेक्ष-गति

$$\begin{aligned} &= (xi + yj) - 16i \\ &= (x - 16)i + yj. \end{aligned} \quad \dots(6)$$

परन्तु यह उत्तर-पूर्व की ओर से है, तो i और j के गुणांक समान होंगे।

$$\therefore x - 16 = y = -a. \quad \dots(7)$$

(4) और (7) से

$$y = -8. \quad \dots(8)$$

$$\therefore \text{वायु की गति} = 8i - 8j. \quad \dots(9)$$

अर्थात्

उत्तर-पश्चिम की ओर से।

चूँकि \vec{P} , \vec{Q} का परिणामित बल \vec{R} है

$$\therefore \vec{R} = \vec{P} + \vec{Q}.$$

$$\text{या } \frac{R \cdot c}{OC} = \frac{Pa}{OA} + \frac{Qb}{OB}.$$

$$\text{या } \frac{Pa}{OA} + \frac{Qb}{OB} - \frac{Rc}{OC} = 0. \quad \dots(5)$$

परन्तु A, B, C समरेख हैं इसलिए a, b, c के गुणांकों का बीजीय-योग शून्य होगा ।

$$\text{अतः } \frac{P}{OA} + \frac{Q}{OB} - \frac{R}{OC} = 0.$$

$$\text{या } \frac{P}{OA} + \frac{Q}{OB} = \frac{R}{OC}.$$

नोट:—यदि \vec{P} , \vec{Q} का परिणामित बल R न हो परन्तु \vec{P} , \vec{Q} और \vec{R} तीनों बल संतुलन-अवस्था में हो तो

$$\frac{P}{OA} + \frac{Q}{OB} + \frac{R}{OC} = 0.$$

$$(\text{क्योंकि } \vec{P} + \vec{Q} = -\vec{R}.)$$

उदाहरण नं० 3.

किसी समानांतरफलक (parallelepiped) के चारों विकर्णों तथा सम्मुख किनारों के मध्य-बिन्दुओं को मिलाने वाली रेखाएँ एक ही बिन्दु में से निकलती हैं जो प्रत्येक का समद्विभाजन करता है ।

माना OADBCLMN एक समानान्तरफलक है और I विकर्ण OM का मध्य-बिन्दु है ।

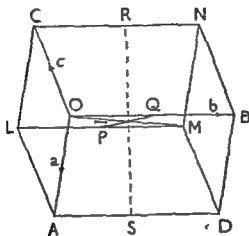
$$\text{माना } \vec{OA} = \vec{a},$$

$$\vec{OB} = \vec{b},$$

$$\vec{OC} = \vec{c}$$

$$\begin{aligned} \text{अथ } \vec{OM} &= \vec{OA} + \vec{AD} + \vec{DM}, \\ &= \vec{a} + \vec{b} + \vec{c} \end{aligned} \quad \dots(1)$$

$$\vec{OI} = \frac{1}{3} (\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}) \quad \dots(2)$$



माना विकर्ण BL का मध्य-बिन्दु I' है तो

$$\vec{OI'} = \frac{\vec{a} + \vec{c} + \vec{b}}{2} \quad \dots(3)$$

(2) और (3) में स्पष्ट है कि I' , I पर सपाती है।

इसी प्रकार P, Q, LM और OB के मध्य-बिन्दु हैं तो P और Q के स्थिति-सदिश क्रमशः

$$\frac{2\vec{a} + 2\vec{c} + \vec{b}}{2} \text{ व } \frac{\vec{b}}{2} \text{ हैं}$$

\therefore PQ का मध्य-बिन्दु $\frac{\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}}{2}$ है जोकि I पर संपाती है।

अतः विकर्ण तथा सम्मुख त्रिभुजों के मध्य-बिन्दुओं को मिलाने वाली रेखाएँ एक ही बिन्दु I पर सङ्गामी होती हैं।

उदाहरण नं० 4.

एक कण पर कई बल-केन्द्र कार्य कर रहे हैं जिनमे से कुछ तो उसे आकर्षित करते हैं और कुछ प्रतिकर्षित करते हैं। परन्तु प्रत्येक बल उसके केन्द्र की कण से दूरी के अनुलोमत, विचरण करता है और भिन्न-भिन्न बल केन्द्रों पर बल का परिमाण भी भिन्न है। सिद्ध करो कि उनका परिणामित बल एक नियत बिन्दु मे से गुजरता है चाहे कण कही भी हो।

[धामरा 40, विक० 62]

माना कण O बिन्दु पर है, और P_1, P_2, \dots, P_n बल-केन्द्र हैं। मूलबिन्दु O के सापेक्ष माना P_1, P_2, \dots, P_n के स्थिति-सदिश क्रमशः a, b, c, \dots है।

माना बल $\mu_1 a, \mu_2 b, \mu_3 c, \dots$ हैं।

जबकि $\mu_1, \mu_2, \mu_3, \dots$ घन या ऋण स्थिराक हैं उनके प्रतिकर्षण या आकर्षण के गुण के अनुसार.

परिणामित बल R है,

$$R = \mu_1 a + \mu_2 b + \mu_3 c + \dots \quad \dots(1)$$

यदि $a, b, c + \dots$ के सहचर अंक $\mu_1, \mu_2, \mu_3, \dots$ हो तो उनका केन्द्रक G ऐसा बिन्दु होगा कि

$$\vec{OG} = \frac{\mu_1 a + \mu_2 b + \mu_3 c + \dots}{\mu_1 + \mu_2 + \mu_3 + \dots} \quad \dots(2)$$

(1) और (2) से

$$R = (\mu_1 + \mu_2 + \mu_3 + \dots) \vec{OG} = K \vec{OG},$$

($K = \mu_1 + \mu_2 + \mu_3, \dots$ स्थिराक है।)

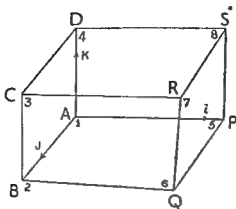
चूँकि केन्द्रक G मूलबिन्दु O की स्थिति से विमुक्त होता है इसलिए G एक नियत बिन्दु है। अतः परिणामित-बल R अचर बिन्दु G से गुजरता है।

उदाहरण नं० 5.

छाठ कण जिनकी संहति 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 ग्राम है क्रमशः इकाई घन के कोनों पर इस प्रकार रखे गए हैं कि पहले चार एक समतल

ABCD के कोनों पर और दूसरे चार इन कोनों के सम्मुख समतल पर प्रक्षेप P, Q, R, S पर। तो इनके सहति-केन्द्र के निर्देशांक ज्ञात करो।

ABCD PQRS एक समानांतरफलक है।



माना बिन्दु A के सापेक्ष, P, B, D के स्थिति-सदिश क्रमशः i, j, k हैं।

Q, C, R, S के स्थिति-सदिश क्रमशः

$i+j, j+k, i+j+k$ और $i+k$ होंगे।

सहति-केन्द्र G का स्थिति-सदिश

$$\vec{AG} =$$

$$\frac{1 \cdot 0 + 2j + 3(j+k) + 4k + 5i + 6(i+j) + 7(i+j+k) + 8(i+k)}{1+2+3+4+5+6+7+8}$$

$$= \frac{26i + 18j + 22k}{36} = \frac{13i + 9j + 11k}{18}$$

$$|\vec{AG}| = \sqrt{\frac{13^2 + 9^2 + 11^2}{18}} = \frac{\sqrt{371}}{18}$$

सहति-केन्द्र G के निर्देशांक

$$= \left(\frac{13}{18}, \frac{1}{2}, \frac{11}{18} \right)$$

उदाहरण नं० 6.

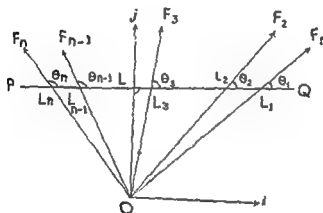
यदि बिन्दु O पर कार्य कर रहे समतलीय बल F_1, F_2, \dots, F_n संतुलन अवस्था में हों और एक तिर्यक रेखा उनकी कार्य-दिशाओं को बिन्दु

L_1, L_2, \dots, L_n पर काटती है तो सिद्ध करो कि

$$\sum \frac{\vec{F}}{OL} = 0$$

[रेखा OL घन होगी यदि वह \vec{OF} की दिशा में है।]

[धारा 48, सखनऊ 56]



माना F_1, F_2, \dots, F_n तिर्यक रेखा PQ के साथ $\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_n$ का कोण बनाते हैं और OL, O से PQ पर लम्ब है।

माना PQ के लम्बवत तथा PQ की दिशा में इकाई सदिश j और i है। तो

$$\vec{F}_1 = F_1 \cos \theta_1 i + F_1 \sin \theta_1 j,$$

$$,, \vec{F}_2 = F_2 \cos \theta_2 i + F_2 \sin \theta_2 j,$$

$$,, \vec{F}_3 = F_3 \cos \theta_3 i + F_3 \sin \theta_3 j,$$

$$\dots \dots \dots \dots \dots \dots$$

$$\vec{F}_n = F_n \cos \theta_n \mathbf{i} + F_n \sin \theta_n \mathbf{j}.$$

इनका परिणामित बल

$$\begin{aligned} R &= \sum_{r=1}^n (F_r \cos \theta_r \mathbf{i} + F_r \sin \theta_r \mathbf{j}) \\ &= \sum_{r=1}^n (F_r \cos \theta_r) \mathbf{i} + \left(\sum_{r=1}^n F_r \sin \theta_r \right) \mathbf{j}. \end{aligned}$$

परंतु बल संतुलन अवस्था में है। इसलिए \mathbf{i} और \mathbf{j} के गुणांक शून्य होंगे। अतः

$$F_1 \sin \theta_1 + F_2 \sin \theta_2 + \dots + F_n \sin \theta_n = 0. \quad \dots(1)$$

यदि O से PQ पर लम्ब $OL=p$ तो

$$\sin \theta_1 = \frac{p}{OL_1}, \sin \theta_2 = \frac{p}{OL_2}, \dots, \sin \theta_n = \frac{p}{OL_n} \dots(2)$$

(1) और (2) से

$$\frac{F_1 \cdot p}{OL_1} + \frac{F_2 \cdot p}{OL_2} + \dots + \frac{F_n \cdot p}{OL_n} = 0.$$

$$\text{या } \frac{F_1}{OL_1} + \frac{F_2}{OL_2} + \dots + \frac{F_n}{OL_n} = 0 \quad (3)$$

चूँकि $p \neq 0$, अतः OL_1, OL_2, OL_n सब शून्य होंगे।

उदाहरण न० 7.

यदि \mathbf{a} और \mathbf{b} असरेख-सदिश हो तो सिद्ध करो कि बिन्दु

$$l_1 \mathbf{a} + m_1 \mathbf{b} \quad (i=1, 2, 3)$$

समरेख होंगे यदि और केवल यदि

$$\begin{vmatrix} l_1 & m_1 & 1 \\ l_2 & m_2 & 1 \\ l_3 & m_3 & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

अतः सिद्ध करो कि बिन्दु $\mathbf{a} - 2\mathbf{b} + 3\mathbf{c}, 2\mathbf{a} + 3\mathbf{b} - 4\mathbf{c}, -7\mathbf{b} +$

$10\mathbf{c}$ समरेख हैं।

[नागपुर 63]

माना तीन बिन्दुओं A, B, C के स्थिति-सदिश क्रमशः

$$l_1 a + m_1 b, l_2 a + m_2 b, l_3 a + m_3 b \text{ हैं।}$$

यदि यह समरेख होंगे तो

$$\text{माना } AB : BC = \lambda : 1$$

$$\text{तो } l_2 a + m_2 b = \frac{(l_1 a + m_1 b) + \lambda(l_3 a + m_3 b)}{\lambda + 1}$$

$$\text{या } (\lambda l_2 + l_2 - l_1 - \lambda l_3) a + (\lambda m_2 + m_2 - m_1 - \lambda m_3) b = 0. \dots (1)$$

a और b के गुणांकों को शून्य करने पर

$$\frac{l_1 - l_2}{l_2 - l_3} = \lambda, \text{ और} \dots (2)$$

$$\frac{m_1 - m_2}{m_2 - m_3} = \lambda. \dots (3)$$

(2) और (3) से

$$\frac{l_1 - l_2}{l_2 - l_3} = \frac{m_1 - m_2}{m_2 - m_3}$$

$$\text{या } (l_1 - l_2)(m_2 - m_3) - (m_1 - m_2)(l_2 - l_3) = 0. \dots (4)$$

$$\text{या } \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ l_1 & l_1 - l_2 & l_2 - l_3 \\ m_1 & m_1 - m_2 & m_2 - m_3 \end{vmatrix} = 0.$$

$$\text{या } \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ l_1 & l_2 & l_3 \\ m_1 & m_2 & m_3 \end{vmatrix} = 0.$$

माना बिन्दु $2a + 3b - 4c$, बिन्दुओं $(a - 2b + 3c)$, $(-7b + 10c)$ को मिलाने वाली रेखा को $\lambda : 1$ के अनुपात में बाँटता है। तो

$$2a + 3b - 4c = \frac{a - 2b + 3c - \lambda(-7b + 10c)}{\lambda + 1}$$

$$\text{या } (2\lambda + 2 - 1)a + (3\lambda + 3 + 2 + 7\lambda)b + (-4\lambda - 4 - 3 - 10\lambda)c = 0$$

a, b और c के गुणांकों को शून्य करने से

$$\lambda = -\frac{1}{2}, \lambda = -\frac{1}{2}, \lambda = -\frac{1}{2}.$$

अतः बिन्दु समरेख है।

प्रश्नावली नं० 3

1. किसी घन के एक कोने पर स्थित एक बल पर तीन बल 1, 2, 3 पी० मार, क्रमशः उस कोने पर मिलने वाले तीन समतलों के विकर्णों की दिशाओं में कार्य कर रहे हैं। तो उनका परिणामित बल ज्ञान करो।
2. एक सदिश और दूसरा ऊर्ध्वाधर से 60° का कोण बनाना हुआ बल ज्ञात करो जिनका परिणामित बल P पी० भा० ऊर्ध्वाधर की दिशा में है।
3. यदि दो बलों के परिणामित बल का परिमाण एक घटक के परिमाण के बराबर हो और उमकी दिशा इस घटक के लम्बवत हो तो दूसरा घटक ज्ञात करो।
4. किसी घन के एक कोने पर मिलने वाले तीन समतलों के विकर्णों द्वारा निरूपित किए गए सदिशों का योग ज्ञात करो।

[इलाहबाद 56, उस्मानिया 56, 59]

5. ज्ञान करो कि निम्न सदिश एकसातनः आधित हैं या स्वतन्त्र हैं।
 $r_1 = i - 3j + 2k$,
 $r_2 = 2i - 4j - k$,
 $r_3 = 3i + 2j - k$.
6. एक नाव की पानी के सापेक्ष गति $3i + 4j$ है। और पानी की पृथ्वी के सापेक्ष गति $i - 3j$ है। तो नाव की पृथ्वी के सापेक्ष गति ज्ञान करो जबकि i और j क्रमशः एक कि० मी० प्रति घंटा की गति पूर्व और उत्तर की ओर निरूपित करते हैं।
7. $3n$ बिन्दुओं, $i, 2i, 3i, \dots, ni$; $j, 2j, 3j, \dots, nj$; $k, 2k, 3k, \dots, nk$, का केन्द्रक ज्ञात करो।

[उस्मानिया 56]

8. यदि n बिन्दुओं के स्थिति-सदिश n सगामी बल निरूपित करने हों तो सिद्ध करो कि यदि उनका केन्द्रक मूलबिन्दु पर सपाती है तो बल संतुलन अवस्था में होंगे।

9. यदि दो बल $n\vec{OA}$ और $m\vec{OB}$ हों तो उनका परिणामित-बल $(m+n)\vec{OR}$ होगा जबकि R, AB को $m : n$ के अनुपात में बाँटता है।
10. D, E, F त्रिभुज ABC की भुजाओं के मध्य-बिन्दु हैं। और O त्रिभुज के समतल में कोई बिन्दु है। तो सिद्ध करो कि बल \vec{OA} , \vec{OB} , \vec{OC} की पद्धति बल \vec{OD} , \vec{OE} , \vec{OF} की पद्धति के समान होंगी यदि दोनों पद्धतियाँ एक ही बिन्दु पर कार्य करें। और यह भी सिद्ध करो कि प्रत्येक पद्धति $\vec{3OG}$ के बराबर है, G त्रिभुज ABC का केन्द्रक है।
11. एक बिन्दु i - j समतल में समान गति से घूर्णन बनाता है। वह 12 सैकण्ड में एक चक्र पूरा कर लेता है। यदि प्रारम्भ में केन्द्र के सापेक्ष उसका स्थिति-सदिश i है, और वह i से j की ओर जाता है। तो 1, 3, 5, 7, $1\frac{1}{2}$, और $4\frac{1}{2}$ सै० के पश्चात् उसका स्थिति-सदिश ज्ञात करो।
(राजस्थान 66)
12. किसी त्रिभुज के मध्य-बिन्दुओं पर तीन बल भुजाओं के समान तथा उनके समानुपाती कार्य कर रहे हैं। तो सिद्ध करो कि वे संतुलन में होंगे।
(सर्वेक लाम्बी-प्रमेय का प्रयोग करो।)
13. एक कार 30 कि. प्र. घ. की गति से जा रही है। उसमें से एक व्यक्ति 10 कि. प्र. घ. की गति में, कार की गति के साथ 150° का कोण बनाती हुई दिशा में छलांग लगाता है। तो उसकी पृथ्वी के सापेक्ष गति ज्ञात करो।
14. दो कारें A और B एकसमान (uniform) गति से चल रहे हैं। एक समय उनके बीच की दूरी 15 फुट है। A तो B की ओर 5 फुट प्र. सं. की गति से और B रेखा AB के सम्वतः $3\frac{3}{4}$ फुट प्र. सं. की गति से चल रहा है। तो उनकी सापेक्ष-गति ज्ञात करो।

- 15 एक चतुर्भुज ABCD के कोने A पर दो बल \vec{AB} और \vec{AD} कार्य कर रहे हैं। और दो बल \vec{CB} और \vec{CD} कोने C पर। तो सिद्ध करो कि उनका परिणामित-बल $4\vec{PQ}$ है, जहाँ P और Q क्रमशः AC और BD के मध्य-बिन्दु हैं।
- 16 किसी समय-चतुर्भुज के शीर्ष A पर पाँच बल दूसरे शीर्षों की दिशाओं में कार्य कर रहे हैं। यदि बलों का परिमाण शीर्षों की A से दूरी के समानुपाती हो तो उनका परिणामित बल ज्ञात करो।
-

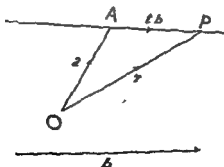
सरल रेखा और समतल के सदिश-समीकरण

3.1 परिचय

आगे के कुछ पृष्ठों में हम देखेंगे कि यह सम्भव है कि सरल रेखाओं या समतलों पर स्थित बिन्दुओं के स्थिति-सदिश को, दिए हुए सदिशों तथा चर अदिशों (चर प्राचल variable parameter) में अभिव्यक्त कर सकते हैं। प्राचल के किसी भी विशेष मान के लिए हम सदिश-समीकरण द्वारा अभिव्यक्त किए गए बिन्दु-पथ पर एक निश्चित बिन्दु प्राप्त करते हैं। विलोमतः बिन्दु-पथ पर किसी भी बिन्दु के स्थिति-सदिश के अनुरूप प्राचल का एक निश्चित मान होता है। ऐसे समीकरण को (parametric equations) प्राचल-सदिष्ट समीकरण या केवल प्राचल-समीकरण कहते हैं।

3.2 सरल रेखा का समीकरण : (equation of a st. line)

3.2 (1) सरल-रेखा जो दिए हुए बिन्दु में से गुजरती है तथा एक दिए हुए सदिश के समानान्तर है।



माना दिया हुआ बिन्दु A है और उसका मूलबिन्दु O के सापेक्ष स्थिति-सदिश \mathbf{a} है। और सरल-रेखा सदिश \mathbf{b} के समानान्तर है। माना

सरल-रेखा पर कोई बिन्दु P है जिसका स्थिति-सदिश \vec{r} है। तब

$$\vec{r} = \vec{OA} + \vec{AP} \quad \dots (1)$$

किन्तु \vec{AP} सदिश \vec{b} के समानान्तर है इसलिए

$$\vec{AP} = t \vec{b} \quad \dots (2)$$

(क्योंकि t कोई वास्तविक संक है। और \vec{AP} व \vec{b} की दिशा एक ही है तो t धन और यदि दोनों की दिशाएँ भिन्न हैं तो t ऋण होगा)

(1) और (2) से

$$\vec{r} = \vec{a} + t \vec{b} \quad \dots (3)$$

क्योंकि P सरल-रेखा पर कोई स्वेच्छ बिन्दु है इसलिए t को भिन्न 2 मान देने से रेखा पर P की भिन्न-भिन्न स्थिति प्राप्त करते हैं।

अतः समीकरण (3) सरल-रेखा का समीकरण है जिसका प्राचल (parameter) t है।

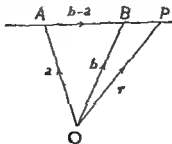
उप-प्रमेय : मूलबिन्दु O से हो कर जाने वाली और सदिश \vec{b} के समानांतर रेखा की प्राचल-समीकरण

$$\vec{r} = t \vec{b} \quad \dots (4)$$

($\because \vec{a}$ शून्य है।)

3.2 (2) दो दिए हुए बिन्दुओं से हो कर गुजरने वाली रेखा

माना दिए हुए बिन्दु A और B हैं जिनके स्थिति-सदिश, मूलबिन्दु O के सापेक्ष \vec{a} और \vec{b} हैं। AB पर कोई बिन्दु P लो।



माना P का स्थिति-सदिश r है।

$$\vec{AB} = b - a. \quad \dots (1)$$

$$\therefore \vec{AP} = t (b - a).$$

(जबकि t कोई गुणज (multiple) है)

$$\begin{aligned} \therefore \vec{OP} &= \vec{AP} + \vec{OA} \\ &= a + t (b - a) = (1 - t) a + b \end{aligned} \quad \dots (2)$$

3.3 सदिश-समीकरण से कार्तीय (Cartesian) समीकरण ज्ञात करना—

अनुच्छेद 3.21 (1) में यदि (a_1, a_2, a_3) व (x, y, z) क्रमशः A और P के निर्देशांक हैं और i, j, k क्रमशः अक्ष OX, OY, OZ की दिशाओं में इकाई-सदिश हैं। तो

$$a = a_1 i + a_2 j + a_3 k$$

$$r = xi + yj + zk.$$

$$\text{और यदि सदिश } b = b_1 i + b_2 j + b_3 k.$$

तो 3.21 में समीकरण (1) और (3) से

$$xi + yj + zk = (a_1 i + a_2 j + a_3 k) + t(b_1 i + b_2 j + b_3 k) \dots (1)$$

दोनों ओरों में i, j, k के गुणांकों की तुलना करने में प्राप्त है

$$x = a_1 + b_1 t,$$

$$y = a_2 + b_2 t,$$

$$z = a_3 + b_3 t,$$

या

$$\frac{x - a_1}{b_1} = \frac{y - a_2}{b_2} = \frac{z - a_3}{b_3} = t \quad \dots (2)$$

समीकरण (1) निर्देशांक-ज्यामिति में बिन्दु (a_1, a_2, a_3) में से निकलने वाली रेखा का समीकरण है और इसके दिक्कोज्या (d.c) b_1, b_2, b_3 के समानुपाती है।

- (2) पुन. यदि समीकरण 3.22 (2) में a, b, r के अनुस्यू निर्देशांक लिखें तो

$$xi + yj + zk = (1 - t)(a_1i + a_2j + a_3k) + t(b_1i + b_2j + b_3k) \quad \dots(3)$$

दोनों ओर से i, j, k के गुणांकों की तुलना करने से प्राप्त है

$$x = (1 - t)a_1 + b_1t,$$

$$y = (1 - t)a_2 + b_2t,$$

$$z = (1 - t)a_3 + b_3t,$$

$$\text{या } \frac{x - a_1}{b_1 - a_1} = \frac{y - a_2}{b_2 - a_2} = \frac{z - a_3}{b_3 - a_3} = t.$$

जोकि बिन्दु $A(a_1, a_2, a_3)$ और $B(b_1, b_2, b_3)$ में से हो कर जाने वाली रेखा का कार्तीय समीकरण है।

- 3.4 तीन सदिश एक ही रेखा पर समाप्त हो (Condition that three vectors should terminate in the same st. line)

यदि तीन बिन्दु जिनके स्थिति-सदिश a, b, c है एकरेखस्थ हो तो उसके लिए आवश्यक और पर्याप्त प्रतिबन्ध यह है कि हम सदा तीन भ्रक l, m, n (सब शून्य नहीं) ऐसे ज्ञात कर सकते हैं कि

$$la + mb + nc = 0,$$

$$\text{और } l + m + n = 0$$

प्रतिबन्ध आवश्यक है :—

माना तीन A, B, C बिन्दुओं के किसी मूलबिन्दु के सापेक्ष, स्थिति-सदिश a, b, c हैं।

- A और B में से हो कर जाने वाली रेखा का सदिश-समीकरण 3.22 (2) से

$$r = a + t(b - a) \quad \dots(1) \text{ है।}$$

यदि बिन्दु C , इस रेखा पर स्थित है। तो

$$c = a + t(b - a),$$

$$\text{या } c + (1 - t)a - tb = 0. \quad \dots(2)$$

माना $l = t - 1$, $m = -t$, $n = 1$, तो

गुणांकों का योग

$$= l + m + n = 0$$

अतः प्रतिबन्ध आवश्यक है।

प्रतिबन्ध पर्याप्त है:—माना तीन सदिश a, b, c निम्न समीकरण को सतुष्ट करते हैं

$$l a + m b + n c = 0. \quad \dots (1)$$

$$\text{और } l + m + n = 0 \quad \dots (2)$$

l से भाग देने पर

$$a + \frac{m}{l} b + \frac{n}{l} c = 0, \quad \dots (3)$$

$$1 + \frac{m}{l} + \frac{n}{l} = 0, \quad \dots (4)$$

माना $\frac{n}{l} = -t$, तो $\frac{m}{l} = 1 - t$,

(3) में मान रखने पर

$$a + (1 - t) b - t c = 0, \quad \dots (5)$$

(5) से स्पष्ट है कि b , और c में से हो कर जाने वाली रेखा पर a स्थित है अर्थात् a, b, c समरेख हैं।

नोट—इस प्रमेय को सिद्ध करने के लिए हम अनु० 1.11 का भी प्रयोग कर सकते हैं।

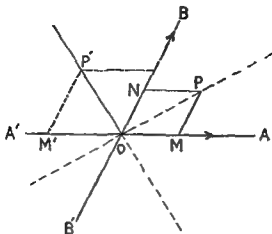
3.5 दो रेखाओं के बीच के कोण का अर्धक ज्ञात करना

AOA' और BOB' दो सरल-रेखाएं हैं जो O पर एक दूसरे को काटती हैं। OP और OP' क्रमशः $\angle AOB$ और $\angle BOA'$ के अर्धक हैं।

माना बिन्दु O के सापेक्ष OA और OB की दिशाओं में इकाई सदिश क्रमशः

\hat{a} और \hat{b} हैं।

P अर्धक OP पर कोई बिन्दु है। P से \vec{OA} और



\vec{OB} के समानान्तर PM और PN खींचो

$\therefore OP, \angle AOB$ का अर्धक है

$\therefore \angle POM = \angle PON = \angle OPM.$

अतः $PM = OM.$

... (1)

अब OM , इकाई सदिश \hat{a} की दिशा में है और PM, OB के समानान्तर है।

$$\therefore \vec{OM} = t\hat{a}, \vec{PM} = t\hat{b},$$

... (2)

माना P का स्थिति-सदिश \vec{r} है। तो

$$\vec{OP} = \vec{r} = \vec{OM} + \vec{MP} = t\hat{a} + t\hat{b}$$

$$\text{या } \vec{r} = t(\hat{a} + \hat{b})$$

....(3)

जैसे ही P सरल रेखा OP पर विचरण करता है t का मान भी बदलता जाता है। अतः (3) अर्धक का अभीष्ट समीकरण है।

नोट (1) यदि OA और OB की दिशा में इकाई-सदिश के स्थान पर सदिश \vec{a} और \vec{b} दिए हुए हों तो अर्धक का समीकरण निम्न होगा—

$$r = t \left(\frac{a}{|a|} + \frac{b}{|b|} \right) \quad \dots(4)$$

क्योंकि $\hat{a} = a/|a|$, और $\hat{b} = b/|b|$.

(2) OP' कोण $A'OB$ का अर्धक है और OA' , व OB की दिशाओं में

इकाई-सदिश \hat{a} व \hat{b} हैं। इसलिए अर्धक OP' का समीकरण

$$r = t (\hat{b} - \hat{a}) \text{ है।} \quad \dots(5)$$

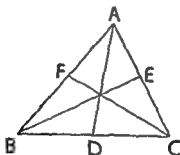
उदाहरण 1.

सिद्ध करो कि त्रिभुज की माध्यिकाएँ एक बिन्दु पर मिलती हैं, जो प्रत्येक को 2:1 के अनुपात में विभाजित करता है।

[लखनऊ 52, 58, 60, 62, 63, आगरा 52, 55, 62, दिल्ली 61]

माना कि A, B, C शीर्षों के स्थिति-सदिश, किसी मूलबिन्दु O के सापेक्ष क्रमशः

a, b, c हैं। तो D, E, F भुजाओं के मध्य-बिन्दुओं के स्थिति-सदिश क्रमशः



$$\frac{b+c}{2}, \frac{c+a}{2}, \frac{a+b}{2} \text{ होंगे।}$$

माध्यिकाएँ AD, BE के समीकरण

क्रमशः

$$r = (1-t)a + t \frac{(b+c)}{2} \quad \dots(1)$$

$$\text{और } r = (1-s) b + s \left(\frac{c+a}{2} \right) \quad \dots (2)$$

(1) और (2) का प्रतिच्छेद-बिन्दु प्राप्त करने के लिए

$$(1-t) a + t \left(\frac{b+c}{2} \right) = (1-s) b + s \frac{(c+a)}{2}$$

$$\text{या } (1-t-\frac{s}{2}) a + (\frac{t}{2} + s - \frac{1}{2}) b + (\frac{t}{2} - \frac{s}{2}) c = 0 \dots 3$$

a, b, c के गुणांकों को शून्य रखने पर

$$1-t-\frac{s}{2}=0. \quad \dots (4)$$

$$\frac{t}{2} + s - 1 = 0. \quad \dots (5)$$

$$\frac{t}{2} - \frac{s}{2} = 0. \quad \dots (6)$$

$$(6) \text{ से } t=s. \quad \dots (7)$$

(7) और (5) से

$$t = \frac{2}{3} = s. \quad \dots (8)$$

(8) से (1) में t का मान या (2) में s का मान रखने पर

$$r = \frac{a+b+c}{3}. \quad \dots (9)$$

सममिति से स्पष्ट है कि माध्यिका AD और CF का भी प्रतिच्छेद-

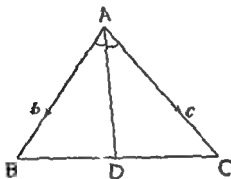
बिन्दु $\frac{a+b+c}{3}$ ही है।

अतः तीनों माध्यिकाएँ एक ही बिन्दु पर मिलती हैं।

2 सिद्ध करो कि त्रिभुज ABC में कोण A का अन्तः समद्विभाजक सम्मुख भुजा BC को AB : AC के अनुपात में काटता है।

[लघनक 53, ननयत्ता 53, 60, पञाब 60]

मूलबिन्दु A के सापेक्ष, माना B और C के स्थिति-सदिश क्रमशः \mathbf{b} और \mathbf{c} हैं।



$\angle A$ के समद्विभाजक AD का समीकरण

$$r = t \left(\frac{b}{b} + \frac{c}{c} \right) \text{ है।}$$

$$\text{या } r = \frac{t}{bc} (cb + bc) \quad \dots(1)$$

भुजा BC का समीकरण

$$r = (1-s)c + sb. \quad \dots(2)$$

(1) और (2) से

$$(1-s)c + sb = t \left(\frac{b}{b} + \frac{c}{c} \right). \quad \dots(3)$$

दोनों पक्षों से b और c के गुणांकों की तुलना करने पर

$$1-s = t/c, \quad \dots(4)$$

$$s = t/b, \quad \dots(5)$$

$$\text{या } t = \frac{bc}{b+c} \quad \dots(6)$$

(1) में t का मान रखने पर, बिन्दु D का स्थिति-सदिश

$$= \frac{1}{b+c} (cb + bc), \quad \dots(7)$$

अर्थात् बिन्दु D, BC को $b : c$ के अनुपात में बाँटता है।

नोट:—कोण A का बाह्य समद्विभाजक भी BC को $b : c$ के अनुपात में बाँटता है।

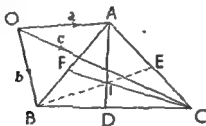
3 सिद्ध करो कि त्रिभुज के कोणों के अन्तः समद्विभाजक सगामी हैं।

[सूचनक 53, 62, 65, घागरा 52, 54, 57,

विहार 61, दिल्ली 55, राज० 49]

माना A, B, C के स्थिति-सदिश, मूलबिन्दु O के सापेक्ष a, b, c, हैं और भुजाओं BC, CA, AB की अन्तः लम्बाई a, b, c है।

यदि AD कोण A का अन्तः समद्विभाजक है तो



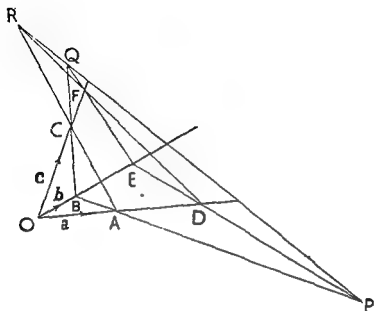
$$\vec{OD} = \frac{bb + cc}{b + c} \quad \dots (1)$$

AD पर I ऐसा बिन्दु हो जो AD को $b + c : a$ के अनुपात में बाँटता है।

$$\begin{aligned} \vec{OI} &= a \cdot a + (b + c) \frac{bb + cc}{b + c} \\ &= \frac{aa + bb + cc}{a + b + c} \quad \dots (2) \end{aligned}$$

(2) में समझाने से स्पष्ट है कि बिन्दु I कोण B और C के अन्तः समद्विभाजकों पर भी स्थित है।

4 तीन सगामी रेखाएँ OA, OB, OC बिन्दु D, E, F तक बढ़ाई गई हैं तो सिद्ध करो कि रेखाओं AB, DE; BC, EF; और CA, FD के प्रतिच्छेद-बिन्दु समरेख हैं।



हल:-माना AB और DE; BC और EF; CA और FD के प्रतिच्छेद-बिन्दु P, Q, R हैं।

माना मूलबिन्दु O के सापेक्ष A, B, C और P, Q, R के स्थिति-सदिश क्रमशः \vec{a} , \vec{b} , \vec{c} , और \vec{p} , \vec{q} , \vec{r} हैं।

$$\text{और } \vec{OD} = k_1 \vec{a}, \vec{OE} = k_2 \vec{b}, \vec{OF} = k_3 \vec{c}.$$

जबकि k_1, k_2, k_3 तीन अदिश-राशियाँ हैं। अब

$$\vec{AB} = \vec{b} - \vec{a}. \quad \dots(1)$$

$$\vec{DE} = k_2 \vec{b} - k_1 \vec{a}. \quad \dots(2)$$

P, AB और DE दोनों पर स्थित है

$$\therefore \vec{OP} = \vec{P} = \vec{OA} + t\vec{AB} = \vec{OD} + s\vec{DE}.$$

$$= \vec{a} + t(\vec{b} - \vec{a}) = k_1 \vec{a} + s(k_2 \vec{b} - k_1 \vec{a}). \quad \dots(3)$$

दोनों ओर से \vec{a} , \vec{b} के गुणांकों की तुलना करने से हमें प्राप्त है

$$\left. \begin{aligned} 1-s &= k_1(1-s), \\ \text{और } s &= k_2 s. \end{aligned} \right\} \dots(4)$$

$$\therefore s = \frac{1-k_1}{k_2-k_1}, \text{ और } t = \frac{k_2(1-k_1)}{k_2-k_1} \dots (5)$$

(3) में मान रखने पर

$$\vec{p} = \vec{a} + \frac{k_2(1-k_1)}{k_2-k_1}(\vec{b}-\vec{a}). \dots (6)$$

इसी प्रकार

$$\vec{q} = \vec{b} + \frac{k_3(1-k_2)}{k_3-k_2}(\vec{c}-\vec{b}). \dots (7)$$

$$\vec{r} = \vec{c} + k_1 \frac{(1-k_3)}{(k_1-k_3)}(\vec{a}-\vec{c}). \dots (8)$$

(5), (6) और (7) से

$$\vec{p} - \vec{q} = \frac{1-k_2}{1-k_3}(\vec{q} - \vec{r}).$$

$$\text{या } \vec{QP} = k, \vec{RQ}. \quad \left[\frac{1-k_2}{1-k_3} = K \right]$$

$\therefore P, Q, R$, समरेख है

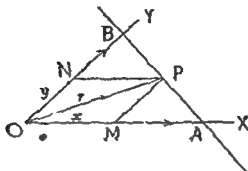
5. सदिश विधि में सरल रेखा के समीकरण $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$ की स्थापना करो जबकि अक्ष, प्रायतीय या तिर्यक हो।

माना OX और OY निर्देशक-अक्ष हैं और एक रेखा इनको A और B पर काटती है।

यदि \vec{OA} और \vec{OB} की दिशाओं में इकाई-सदिश \hat{a} और \hat{b} हो तो

$$\vec{OA} = a \hat{a},$$

$$\vec{OB} = b \hat{b}$$



सरल रेखा पर कोई बिन्दु P लो।

माना P के निर्देशांक (x, y) हैं और सदिश $\vec{OP} = r$, तो

$$\vec{OP} = \vec{OM} + \vec{MP}.$$

$$r = x\hat{a} + y\hat{b} \quad \dots (1)$$

$[\because PM \parallel OY \text{ और } PN \parallel OX]$

रेखा AB का सदिश समीकरण होगा।

$$r = (1-t)a\hat{a} + tb\hat{b}, \quad \dots (2)$$

(1) और (2) से

$$x = a(1-t), \quad \dots (3)$$

$$y = bt, \quad \dots (4)$$

(3) और (4) से

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1 - t + t = 1. \quad \dots (3)$$

जो कि अभीष्ट समीकरण है।

6. बिन्दु $(i - 2j + k)$ और $(3k - 2j)$ को मिलाने वाली रेखा का सदिश-समीकरण ज्ञात करो।

[भाषण 55, लखनऊ 62, कलकत्ता 62]

माना A और B दो बिन्दु हैं जिनके स्थिति-सदिश क्रमशः

$(i - 2j + k)$ और $(3k - 2j)$ हैं।

$$\begin{aligned}\vec{AB} &= (3k - 2j) - (i - 2j + k) \\ &= 2k - i.\end{aligned}\quad \dots(1)$$

A और B को मिलाने वाली सरल-रेखा सदिश \vec{AB} के समानान्तर होगी और बिन्दु A में से होकर जाएगी।

∴ इसका समीकरण

$$\begin{aligned}r &= (i - 2j + k) + t(2k - i) \\ \text{या } r &= (1 - t)i - 2j + (1 + 2t)k.\end{aligned}\quad \dots(2)$$

7. सिद्ध करो कि किसी चतुर्भुज के दोनों विकर्णों के मध्य-बिन्दु समरेख होते हैं। [राज० 56]

माना ABCD एक चतुर्भुज है और P, Q, R क्रमशः विकर्ण AC, BD और EF (AB और CD, तथा BC और DE के कटान-बिन्दुओं को मिलाने वाली सरल-रेखा) के मध्य-बिन्दु हैं।

मूलबिन्दु A के सापेक्ष माना B और D के स्थिति-सदिश क्रमशः \vec{b} और \vec{d} हैं।

$$\begin{aligned}\vec{AE} &= k_1 \vec{b}, \quad \vec{AF} = k_2 \vec{d} \\ \vec{ED} &= \vec{AD} - \vec{AE} = \vec{d} - k_1 \vec{b}\end{aligned}\quad \dots(1)$$

$$\vec{CD} = p \vec{ED} = p(\vec{d} - k_1 \vec{b}), \quad \dots(2)$$

$$\vec{BF} = \vec{AF} - \vec{AB} = (k_2 \vec{d} - \vec{b}), \quad \dots(3)$$

$$\vec{BC} = q \vec{BE} = q(k_2 \vec{d} - \vec{b}). \quad \dots(4)$$

(k_1, k_2, p, q सदिश गुणांक हैं)

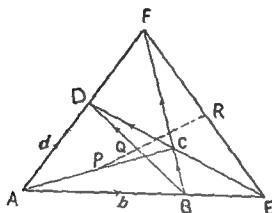
$$\text{अब } \vec{BC} + \vec{CD} = \vec{BD} = \vec{AD} - \vec{AB}.$$

$$\text{या } q(k_2 \vec{d} - \vec{b}) + p(\vec{d} - k_1 \vec{b})$$

$$=d-b.$$

....(5)

दोनों घोर से d घोर b के गुणांकों की तुलना करने पर



$$qk_2 + p = 1.$$

....(6)

$$q + k_1p = 1.$$

....(7)

(6) और (7) से

$$p = \frac{1-k_2}{1-k_1k_2}, \text{ और } q = \frac{1-k_1}{1-k_1k_2}$$

....(8)

$$\vec{AP} = \frac{1}{2}\vec{AC} = \frac{1}{2}\left[\vec{b} + \frac{1-k_1}{1-k_1k_2}(k_2\vec{d}-\vec{b})\right]$$

$$= \frac{k_1(1-k_2)\vec{b} + k_2(1-k_1)\vec{d}}{2(1-k_1k_2)} \quad \text{....(9)}$$

$$\vec{AQ} = \frac{1}{2}(\vec{b} + \vec{d}).$$

....(10)

$$\therefore \vec{AR} = \frac{1}{2}(k_1\vec{b} + k_2\vec{d}).$$

$$\therefore \vec{PQ} = \vec{AQ} - \vec{AP} = \frac{1}{2(1-k_1k_2)}[(1-k_1)\vec{b} + (1-k_2)\vec{d}] \quad \text{....(11)}$$

$$\vec{PR} = \vec{AR} - \vec{AP} = \frac{k_1k_2}{2(1-k_1k_2)} [(1-k_1)\vec{b} + (1-k_2)\vec{d}] \quad \text{....(12)}$$

(11) और (12) से

$$\vec{PR} = k_1 k_2 \vec{PQ}.$$

अतः P, Q, R एकरेखस्य हैं।

8. सदिश की विधि से सिद्ध करो कि एक समान्तर चतुर्भुज की सम्मुख भुजाएँ आपस में बराबर होती हैं और इसके विकर्ण एक-दूसरे को समद्विभाग करते हैं। [सखनऊ 57, 63, आगरा एम. एस. सी. 63]

माना ABCD एक समान्तर चतुर्भुज है और इसके विकर्ण AC व BD का प्रतिच्छेद-बिन्दु P है।

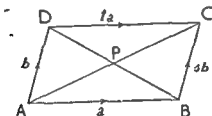
माना \vec{AB} और \vec{AD} क्रमशः सदिश \vec{a} और \vec{b} निरूपित करते हैं

$$\therefore \vec{BC} \parallel \vec{AD} \text{ और } \vec{DC} \parallel \vec{AB}$$

$$\therefore \vec{BC} = s\vec{b}, \text{ और } \vec{DC} = t\vec{a}.$$

[t और s अदिश हैं।]

$$\text{अतः } \vec{AC} = \vec{a} + s\vec{b} = \vec{b} + t\vec{a}.$$



$$\text{या } \vec{a} + s\vec{b} = \vec{b} + t\vec{a} \quad \dots (1)$$

(1) से

$$\therefore t = s = 1 \quad \dots (2)$$

$$\text{अतः } \vec{DC} = \vec{AB} = \vec{a}, \text{ और } \vec{BC} = \vec{AD} = \vec{b}$$

(1) से अर्थात् $\vec{AB} = \vec{DC}$ और $\vec{AD} = \vec{BC}$

(1) पुनः \vec{AC} और \vec{BD} के समीकरण

$$r = t_1(b + a) \quad \dots(3)$$

$$\text{और } r = t_2a + (1 - t_2)b \quad \dots(4)$$

(3) और (4) में AC और BD का प्रतिच्छेद-बिन्दु P के लिए

$$t_1(b + a) = t_2a + (1 - t_2)b \quad \dots(5)$$

$$\therefore t_1 = t_2 = 1/2 \quad \dots(6)$$

$$\therefore \vec{AP} = \frac{1}{2}(a + b)$$

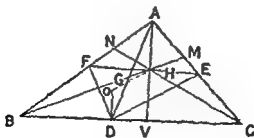
अतः P , AC और BD का मध्य-बिन्दु है।

9.) किसी त्रिभुज के परिकेन्द्र (circum-centre) संबकेन्द्र (ortho centre) और केन्द्रक (centroid) के स्थिति-सदिश, त्रिभुज के शीर्षों के सदिशों के पदों में ज्ञात करो। [दिल्ली 57, लखनऊ 61]

(1) प्रतः सिद्ध करो कि केन्द्रक, परिकेन्द्र और सम्बकेन्द्र को मिलाने वाली रेखा का समविभाजन करता है।

माना A, B, C के स्थिति-सदिश क्रिमी मूलबिन्दु O के सापेक्ष

क्रमशः a, b, c हैं।



O, H और G क्रमशः त्रिभुज के परिकेन्द्र, सम्बकेन्द्र और केन्द्रक हैं।

D, E, F भुजा BC, CA, AB के मध्य-बिन्दु हैं और L, M, N शीर्ष A, B, C के संमुख भुजाओं पर लम्ब-पाद हैं।

चूँकि सम्बकेन्द्र A, B, C का केन्द्रक (centroid) है यदि उनके सहचारी शंक क्रमशः $\tan A, \tan B, \tan C$ हों। तो

II का स्थिति-सदिश

$$= \frac{\tan A \cdot a + \tan B \cdot b + \tan C \cdot c}{\tan A + \tan B + \tan C} \quad \dots(1)$$

यदि परिकेन्द्र O त्रिभुज DEF का सम्बन्ध-केन्द्र है।

किन्तु D, E, F के स्थिति-सदिश क्रमशः

$$\frac{b+c}{2}, \frac{c+a}{2}, \frac{a+b}{2} \text{ हैं।}$$

इसलिए O का स्थिति-सदिश

$$= \frac{\tan A \cdot \frac{(b+c)}{2} + \tan B \cdot \frac{(c+a)}{2} + \tan C \cdot \frac{(a+b)}{2}}{\tan A + \tan B + \tan C} \quad \dots(2)$$

केन्द्रक G का स्थिति-सदिश

$$\vec{OG} = \frac{a+b+c}{3} \quad \dots(3)$$

माना बिन्दु G', OH को 1:2 के अनुपात में बाँटता है। तो G' का स्थिति-सदिश =

$$\begin{aligned} & 1. \frac{\sum (\tan A \cdot a)}{\sum \tan A} + 2. \frac{\sum (\tan A \cdot \frac{b+c}{2})}{\sum \tan A} \\ &= \frac{(\tan A + \tan B + \tan C)}{\tan A + \tan B + \tan C} \cdot \frac{a+b+c}{3} \\ &= \frac{a+b+c}{3} = \vec{OG} \quad (3 से) \end{aligned}$$

अतः बिन्दु G', त्रिभुज ABC के केन्द्रक G का संपाती है।

अतः O, G, H समरेख हैं और G, OH का सप्तविभाजन करता है।

प्रश्नावली 4

1. बिन्दु $(i - 2j + k)$ और $(2i + k)$ में से होकर जाने वाली सीधी रेखा का समीकरण ज्ञात करो । [सखनऊ, 54]
2. सिद्ध करो कि किसी त्रिभुज के एक कोण का अन्तः समद्विभाजक और दूसरे दो कोणों के बाह्य समद्विभाजक संगामी होते हैं । [राज० 49, बिहार 62]
3. किसी त्रिभुज की दो भुजाओं के मध्य बिन्दुओं को मिलाने वाली सीधी रेखा तीसरी भुजा के समान्तर और उसकी आधी होती है । [आगरा 56, राज० 60, विक्रम 62]
4. M और N किसी समांतर-चतुर्भुज की भुजा AB और CD के मध्य-बिन्दु हैं । यदि DM और BN को मिला दिया जाय, तो सिद्ध करो कि DM और BN विकर्ण AC को तीन बराबर अन्तः खण्डों में विभक्त करती है और AC भी इनको समद्विभाजित करती है । [सख० 51, 58, राज० 60, विक्रम 61, गोरखपुर 67]
5. सिद्ध करो कि समान्तर चतुर्भुज के विकर्ण एक-दूसरे को समद्विभाग करते हैं ।
विश्लेषण: यदि किसी चतुर्भुज के विकर्ण एक-दूसरे को समद्विभाग करें तो वह समान्तर चतुर्भुज होगा । [आगरा 63, गोरखपुर 67, राज० 59, सखनऊ 54, 57]
6. किसी समसम्य (trapezium) की दो असमान्तर भुजाओं के मध्य-बिन्दुओं को मिलाने वाली रेखा, समान्तर भुजाओं के समांतर और उनके योग की आधी होती है । [आगरा 66, 67]
7. सिद्ध करो कि किसी चतुर्भुज की भुजाओं के मध्य-बिन्दुओं को क्रम से मिलाने वाली रेखाएं समान्तर-चतुर्भुज बनाती हैं । [सखनऊ 48]
8. सिद्ध करो कि किसी समलंब के विकर्णों के मध्य-बिन्दुओं को मिलाने वाली रेखा उसकी समान्तर भुजाओं के समान्तर और उनके अन्तर की आधी होती है ।
9. किसी वृत्त की दो जीवाएं APB और CPD एक-दूसरे को समकोण

पर काटती हैं। सिद्ध करो कि \vec{PA} , \vec{PB} , \vec{PC} और \vec{PD} का परिणामित $2\vec{PO}$ है। जबकि O वृत्त का केन्द्र है।

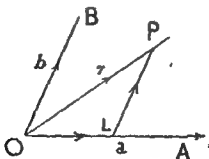
10. यदि बिन्दु P का स्थिति-सदिश किसी स्थिर बिन्दु O के सापेक्ष $a + ib$ है, जबकि i चर है। तो सिद्ध करो कि P का बिन्दु-मार्ग एक सरल-रेखा है। [लसन 47]

11. यदि किसी बिन्दु O को समान्तर चतुर्भुज के शीर्षों से मिला दिया जाय तो इन शीर्षों के सदिशों का योग, विकर्णों के प्रतिच्छेद-बिन्दु के सदिश के चार गुणा होगा।

3.6 समतल का सदिश-समीकरण ज्ञात करना (Vector equation of a plane)

(1) उस समतल का समीकरण ज्ञात करना जो दो सदिशों a और b के समान्तर हो और मूलबिन्दु से हो कर जाय

माना मूलबिन्दु O के सापेक्ष दो दिए हुए बिन्दु A और B के स्थिति-सदिश a और b हैं। और माना समतल पर कोई बिन्दु P है जिसका स्थिति-सदिश r है।



\vec{OP} , a और b समतलीय हैं इसलिए \vec{OP} का a और b के समान्तर पटकों में विघटन किया जा सकता है।

रेखा PL , OB के समान्तर लीचो जो OA को L पर मिलती है

\vec{OL} और \vec{OA} समरेख हैं

$$\therefore \vec{OL} = s\vec{a}.$$

$$\text{और } \vec{LP} = t\vec{b}.$$

जबकि s और t अदिश हैं

$$\vec{OP} = \vec{r} = \vec{OL} + \vec{LP} = s\vec{a} + t\vec{b}.$$

s और t चरमात्रक (parameters) हैं जोकि P के समतल पर विचरण करने पर बदलते हैं।

अतः समतल का समीकरण

$$\vec{r} = s\vec{a} + t\vec{b} \text{ है।}$$

....(1)

(2) उस समतल का समीकरण ज्ञात करना जो दो सदिशों \vec{a} और \vec{b} के समान्तर है और बिन्दु C से होकर जाय। [भाग 42]

मूलबिन्दु O के सापेक्ष, माना बिन्दु C का स्थिति-सदिश \vec{c} है।

माना अभीष्ट समतल पर P कोई बिन्दु है जिसका स्थिति-सदिश \vec{r} है।

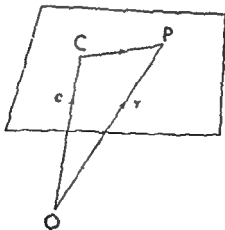
चूँकि समतल \vec{a} और \vec{b} में से होकर जाता है इसलिए \vec{a} , \vec{b} और

\vec{CP} समतलीय है। तो

$$\vec{CP} = s\vec{a} + t\vec{b}.$$

....(1)

(s और t वास्तविक संख्या है)



$$\text{अब } \vec{OP} = \vec{r} = \vec{OC} + \vec{CP}.$$

$$\text{या } \vec{r} = s\vec{a} + t\vec{b}. \quad \dots (2)$$

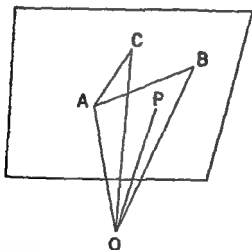
समीकरण (2) समतल का अभीष्ट समीकरण है जिसमें s और t परमापन्न हैं।

(3) तीन बिन्दुओं में से होकर जाने वाले समतल का समीकरण ज्ञात करना।

माना A, B, C तीन बिन्दु हैं जिनके स्थिति-सदिश क्रमशः a, b, c हैं और O मूलबिन्दु है। तो

$$\vec{AB} = b - a.$$

$$\vec{AC} = c - a.$$



अतः अभीष्ट समतल \vec{AB} और \vec{AC} के समान्तर है और बिन्दु A से होकर जाता है।

\therefore इसका समीकरण ऊपर (2) से

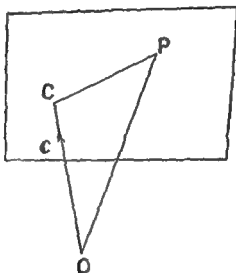
$$\vec{r} = a + s(b - a) + t(c - a) \text{ है।}$$

$$\text{या } r = (1 - s - t) a + sb + tc. \quad \dots(3)$$

(4) उभ समतल का समीकरण ज्ञात करना जो बिन्दु A और B से गुजरे और सदिश c के समान्तर हो

माना A, B, C के स्थिति-सदिश a, b और c है और O मूल-बिन्दु है। तो

$$\vec{AB} = b - a. \quad \dots(1)$$



\therefore समतल \vec{AB} और c के समान्तर है और बिन्दु A इस पर स्थित है। अतः ऊपर (2) से समतल का समीकरण

$$r = a + s(b - a) + t c.$$

$$\text{या } r = (1 - s) a + sb + tc. \quad \dots(4)$$

समतल के समीकरण (1) से (4) तक में हम देखते हैं कि इनमें दो चर सदिश राशियाँ s और t हैं। आगे हम समतल का समीकरण

3.7 आवश्यक तथा पर्याप्त प्रतिबन्ध कि चार बिन्दु समतलीय हों।
(Necessary and sufficient condition that four points are Coplanar.)

त्रिविमीतीय (3-D) अवकाश में कोई चार बिन्दु समतलीय हो तो

उसके लिए आवश्यक और पर्याप्त प्रतिबन्ध यह है कि उनके स्थिति-सदिशों में एकघातित, सम्बन्ध हो जिसमें उनके अदिश गुणांकों का बीजीय योग शून्य हो।

अर्थात्

चार बिन्दु, जिनके स्थिति-सदिश a, b, c, d हैं समतलीय होंगे यदि हम चार सदिश l, m, n, p , ऐसे ज्ञात कर सकते हैं कि

$$la + mb + nc + pd = 0.$$

$$\text{और } l + m + n + p = 0.$$

(l, m, n, p सब शून्य न हों)

(i) प्रतिबन्ध आवश्यक है —

माना a, b, c, d चार बिन्दु A, B, C, D के मूलबिन्दु O के सापेक्ष स्थिति-सदिश हैं।

तीन बिन्दु A, B, C में से होकर जाने वाले समतल का समीकरण $r = (1 - s - t) a + sb + tc$ है। ... (1)

यदि बिन्दु D समतल पर स्थित है तो वह समीकरण (1) को संतुष्ट करेगा।

$$\therefore d = (1 - s - t) d + sb + tc.$$

$$\text{या } (1 - s - t) a + sb + tc - d = 0. \quad \dots (2)$$

a, b, c, d के गुणांकों का बीजीय योग

$$= 1 - s - t + s + t - 1 = 0.$$

अतः प्रतिबन्ध आवश्यक है।

(ii) प्रतिबन्ध पर्याप्त है :—

माना चार बिन्दु A, B, C, D जिनके स्थिति-सदिश क्रमशः a, b, c, d हैं वे निम्न प्रकार से सम्बन्धित हैं

$$la + mb + nc + pd = 0, \quad \dots (3)$$

$$\text{और } l + m + n + p = 0. \quad \dots (4)$$

p से भाग देने पर ($p \neq 0$)

$$d = -\frac{l}{p} a - \frac{m}{p} b - \frac{n}{p} c, \quad \dots (5)$$

$$\text{और } \frac{l}{p} + \frac{m}{p} + \frac{n}{p} + 1 = 0. \quad \dots(6)$$

$$\text{माना } \frac{m}{p} = -s \text{ और } \frac{n}{p} = -t \text{ तो}$$

$$\frac{l}{p} = -(1 - s - t).$$

(5) में मान रखने पर

$$d = (1 - s - t)a + sb + tc. \quad \dots(7)$$

(7) से स्पष्ट है कि बिन्दु A, B, C में से होकर जाने वाले समतल पर D स्थित है। अतः बिन्दु A, B, C, D समतलीय है।

उदाहरण नं० 1.

बिन्दु $4j$ और $(2i + k)$ तथा मूलबिन्दु में से होकर जाने वाले समतल का समीकरण ज्ञात करो। और बिन्दुओं $(i - 2j + k)$, $(3k - 2j)$ को मिलाने वाली रेखा इस समतल को जिस बिन्दु पर काटती है वह ज्ञात करो।
[भाग 56, 65, सन्ध्या 62]

मूलबिन्दु तथा $4j$ और $(2i + k)$ में से होकर जाने वाले समतल का समीकरण

$$r = s(4j) + (2i + k) \quad t \text{ है।} \quad \dots(1)$$

बिन्दुओं $(i - 2j + k)$ और $(3k - 2j)$ को मिलाने वाली रेखा का समीकरण

$$r = (1 - p)(i - 2j + k) + p(3k - 2j) \text{ है।} \quad \dots(2)$$

(1) और (2) के प्रतिच्छेद-बिन्दु के लिए

$$4sj + (2i + k)t = (1 - p)(i - 2j + k) + p(3k - 2j).$$

दोनों ओर से i, j, k के गुणांकों की तुलना करने पर

$$2t = 1 - p. \quad \dots(3)$$

$$t = 1 - p + 3p = 1 + 2p. \quad \dots(4)$$

$$4s = -2 + 2p - 2p = -2. \quad \dots(5)$$

$$\text{या } s = -\frac{1}{2}, \quad \dots(6)$$

$$t = \frac{3}{2}, \quad p = -\frac{1}{2} \quad \dots(7)$$

\therefore (1) और (2) का प्रतिच्छेद-बिन्दु (1), (6) (7) से
 $-2j + (2i + k)\frac{2}{3}$ या $(\frac{2}{3}i - 2j + \frac{2}{3}k)$ है।

2. सिद्ध करो कि निम्न चार बिन्दु समतलीय हैं।

$$6a + 2b - c, \quad 2a - b + 3c, \quad -a + 2b - 4c \text{ और } -12a - b - 3c.$$

हल.-पहले तीन बिन्दुओं में से होकर जाने वाले समतल का समीकरण

$$r = (1 - s - t)(6a + 2b - c) + s(2a - b + 3c) + t(-a + 2b - 4c) \text{ है।} \quad \dots(1)$$

बिन्दु $(-12a - b - 3c)$ इस पर स्थित है इसलिए यह समीकरण (1) को सन्तुष्ट करेगा

$$\therefore -12a - b - 3c = (1 - s - t)(6a + 2b - c) + s(2a - b + 3c) + t(-a + 2b - 4c)$$

दोनों ओर से a, b, c के गुणांकों की तुलना करने से

$$-12 = 6(1 - s - t) + 2s - t = 6 - 4s - 7t \quad \dots(2)$$

$$-1 = 2(1 - s - t) - s + 2t = 2 - 3s \quad \dots(3)$$

$$-3 = -(1 - s - t) + 3s - 4t = -1 + 4s - 3t \quad \dots(4)$$

(3) से $s = 1$; (2) से $t = 2$,

$s = 1$, और $t = 2$ समीकरण (4) को सन्तुष्ट करते हैं।

चारों बिन्दु समतलीय हैं।

करो कि बिन्दु $(2, -3, -1)$ और $(8, -1, 2)$ को मिलाने रेखा का समीकरण

$$x - 2 = \frac{1}{2}(y + 3) = \frac{1}{3}(z + 1) \text{ है।}$$

दो बिन्दु ऐसे ज्ञात करो जिनकी A से दूरी 14 है-

माना x, y, z की दिशा में इकाई-सदिश क्रमशः $\hat{a}, \hat{b}, \hat{c}$ हैं

A और B में से होकर जाने वाली रेखा का समीकरण

$$(x\hat{a} + y\hat{b} + z\hat{c}) = r = (1-t)(2\hat{a} - 3\hat{b} - \hat{c}) + t(8\hat{a} - \hat{b} + 2\hat{c}) \text{ है।} \quad \dots(1)$$

दोनों ओर से $\hat{a}, \hat{b}, \hat{c}$ के गुणांकों की तुलना करने से

$$\left. \begin{aligned} x &= 2(1-t) + 8t = 2 + 6t, \\ y &= -3(1-t) - t = -3 + 2t, \\ z &= (t-1) + 2t = 3t - 1, \end{aligned} \right\} \quad \dots(2)$$

(2) से

$$\frac{x-2}{6} = \frac{y+3}{2} = \frac{z+1}{3} = t.$$

यह सरल रेखा का प्रभीष्ट समीकरण है

यब इस रेखा पर किसी PA बिन्दु के निर्देशांक

$$(6t+2, 2t-3, 3t-1) \text{ है।}$$

$$\text{तो } PA^2 = 14^2 = (6t+2-2)^2 + (2t-3+3)^2 + (3t-1+1)^2 = 49t^2$$

$$\text{या } t = \pm 2.$$

$$\therefore P \text{ के निर्देशांक } = (14, 1, 5) \text{ या } (-10, -7, -7) \text{ हैं।}$$

4. किसी चतुष्फलक (tetrahedron) ABCD के शीर्षों को किसी बिन्दु O से मिला कर AO, BO, CO, DO को बढ़ा दिया तो वे सम्मुख तलों को क्रमशः P, Q, R, S पर काटती है।

सिद्ध करो कि

$$\Sigma \frac{OP}{AP} = 1. \quad [\text{आगरा 53, 58, 61}]$$

माना बिन्दु O के सापेक्ष A, B, C, D के स्थिति-सदिश क्रमशः $\hat{a}, \hat{b}, \hat{c}, \hat{d}$ हैं। इन सदिशों में से किसी एक को शेष तीनों में अभिव्यक्त कर सकते हैं। इसलिए इन चारों में एकघाततः सम्बन्ध है जिसको हम निम्न प्रकार से लिख सकते हैं।

$$la + mb + nc + pd = 0. \quad \dots(1)$$

\therefore बिन्दु P, AO पर स्थित है

इसी प्रकार

$$\frac{OQ}{BQ} = \frac{m}{l+m+n+p} \quad \dots(8)$$

$$\frac{OR}{CR} = \frac{n}{l+m+n+p} \quad \dots(9)$$

$$\text{और } \frac{OS}{DS} = \frac{p}{l+m+n+p} \quad \dots(10)$$

$$\text{अतः } \Sigma \frac{OP}{AP} = 1.$$

5. सदिश विधि से सिद्ध करो कि एक चतुष्फलज की दो सम्मुख भुजाओं के समान्तर समतल में इसका काट समान्तर-चतुर्भुज होगा

[पटना 51, उत्कल 54]

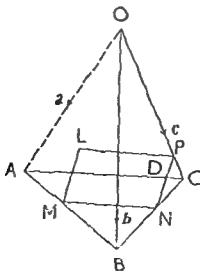
OABC एक चतुष्फलक है।

माना बिन्दु O के सापेक्ष, A, B, C के स्थिति-सदिश क्रमशः a, b,

c हैं।

उस समतल का समीकरण जो \vec{AC} और \vec{OB} के समान्तर है किन्तु किसी बिन्दु D (=d) में से होकर जाय

$$r = d + s(c - a) + tb \text{ है।} \quad \dots(1)$$



समतल OAB का समीकरण

$$r = pa + qb \text{ है।} \quad \dots(2)$$

(1) और (2) की प्रतिच्छेद-रेखा LM है। तो

a, b, c के गुणांकों की तुलना करने से

$$p = -s, q = t, s = 0 \quad \dots(3)$$

\therefore LM का समीकरण

$$r = d_1 + qb \text{ है।} \quad \dots(4)$$

$[d_1, LM]$ पर कोई बिन्दु है।

समतल OBC का समीकरण

$$r = \alpha b + \beta c \text{ है।} \quad \dots(5)$$

(1) और (5) की प्रतिच्छेद-रेखा के लिए

$$\alpha = t, \beta = s = 0 \quad \dots(6)$$

\therefore PN का समीकरण

$$r = d_2 + tb \quad \dots(7)$$

(4) और (7) से स्पष्ट है कि LM तथा PN $b = \vec{OB}$ के समांतर

हैं। अर्थात् $LM \parallel PN$ इस प्रकार हम सिद्ध कर सकते हैं कि $LP \parallel MN$ / अथवा $LMNP$ एक समांतर चतुर्भुज है।

प्रश्नावली 5

14

1. सिद्ध करो कि निम्न बिन्दु समतलीय हैं

(i) $(2a + 3b - c), (a - 2b + 3c), (3a + 4b - 2c)$ और $(2 - 6b + 6c)$

(ii) $(6a - 4b + 10c), (-5a + 3b - 10c), (4a - 6b - 10c), (2b + 10c)$ [कलकत्ता 61]

(iii) $(-a + 4b - 3c), (3a + 2b - 5c), (-3a + 8b - 5c), (-3a - 2b + c)$

(iv) $(a - b - c)$, $(a - 3b + 7c)$, $(a + b - c)$, $(a + b + c)$.

2. सिद्ध करो कि यदि तीन अंक x, y, z ऐसे ज्ञात किए जा सकते हैं कि $xa + yb + zc = 0$, तो सदिश a, b, c एक ही समतल के समान्तर होंगे। अतः या अन्यथा सिद्ध करो कि $(a - b + c)$, $(2a - 3b)$, $(a + 3c)$ एक ही समतल के समान्तर हैं। [दिल्ली 50]
3. बिन्दु $(1, -2, -1)$ और $(2, 3, 1)$ को मिलाने वाली रेखा का, बिन्दुओं $(2, 1, -3)$, $(4, -1, 2)$ और $(3, 0, 1)$ में से होकर जाने वाले समतल का प्रतिच्छेद-बिन्दु ज्ञात करो।
4. सिद्ध करो कि बिन्दु A $(3i - 4j - 2k)$ से होकर जाने वाली और सदिश $(9i + 6j + 2k)$ के समान्तर सरल रेखा का समीकरण $\frac{1}{9}(x - 3) = \frac{1}{6}(y + 4) = \frac{1}{2}(z + 2)$ है।
इस रेखा पर दो ऐसे बिन्दु ज्ञात करो जिनकी A से दूरी 22 है।
5. यदि a, b, c तीन सदिश, एक ही समतल के समान्तर न हों तो सिद्ध करो कि बिन्दु $p_1 a + q_1 b = r_1 c$ ($i = 1, 2, 3, 4$) समतलीय होंगे यदि

$$\begin{vmatrix} 1 & p_1 & q_1 & r_1 \\ 1 & p_2 & q_2 & r_2 \\ 1 & p_3 & q_3 & r_3 \\ 1 & p_4 & q_4 & r_4 \end{vmatrix} = 0.$$

[संकेत चार बिन्दु समतलीय होंगे यदि $\sum_1^4 (p_i a + q_i b + r_i c) = 0$.

और $\sum_1^4 = 0$, a, b, c के गुणांकों को शून्य के बराबर करो।]

6. सदिश की विधि से समतल का अन्तः खण्ड-रूपी समीकरण

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1.$$

ज्ञात करो।

7. सिद्ध करो कि यदि कोई समतल दो समान्तर समतलों को काटे तो प्रतिच्छेद-रेखाएँ समान्तर होंगी।

8. सिद्ध करो कि समीकरण $|r - a| = |r - b|$ एक समतल का समीकरण है जो a और b को मिलाने वाली रेखा को समद्विभाग करती है ।
9. सिद्ध करो कि किसी चतुष्फलक की सम्मुख भुजाओं के मध्य-बिन्दुओं को मिलाने वाली रेखाएँ संगामी होती हैं और एक-दूसरे को समद्विभाग करती हैं ।
10. सिद्ध करो कि किसी चतुष्फलक के शीर्षों का सम्मुख त्रिभुज के केन्द्रक (centroid) को मिलाने वाली रेखाएँ-संगामी होती हैं ।
- [भाग 53]
11. सिद्ध करो कि किसी चतुष्फलक की किसी भुजा तथा उसके सम्मुख भुजा के मध्य बिन्दु से से जाने वाले समतल एक बिन्दु पर मिलते हैं ।

दो सदिशों का गुणनफल

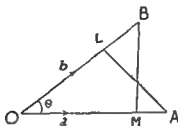
4.1 परिचय

सदिश-बीजगणित में साधारण बीजगणित के अंकों के गुणनफल के नियमों का प्रयोग (केवल परिमाण का गुणनफल करना) नहीं किया जा सकता क्योंकि सदिश-राशि में परिमाण के साथ-साथ दिशा भी होती है। अतः ऐसे ही सदिशों के गुणनफल का अनुमान नहीं लगाया जा सकता। इस लिए सदिशों के गुणनफल की परिभाषा ऐसी होनी चाहिए जोकि भौतिक-विज्ञान में आने वाले अनुप्रयोगों में गुणनफल के समझस हो। हम यहाँ दो भिन्न प्रकार के सदिश-गुणनफलों की परिभाषा देंगे। इनमें से, एक से तो अदिश-राशि तथा दूसरी से सदिश-राशि प्राप्त होती है। इस प्रकार सदिशों को मिलाने वाली दोनों क्रियाएँ "गुणनफल" कहलाती हैं क्योंकि इनमें अंकों के साधारण गुणनफल के कुछ गुण विद्यमान हैं। दोनों गुणनफल सदिशों के मापान्कों के समानुपाती होते हैं और घटन-नियम का भी पालन करते हैं। इस-लिए इनको गुणनफल कहना उचित होगा।

यदि किसी बिन्दु पर कोई बल F कार्य कर रहा है और विस्थापन d है, जोकि F की कार्य-दिशा के साथ θ कोण बनाता है, तो बल F द्वारा किया गया कार्य ज्ञात करने के लिए हम $|F|$ को $|d| \cos \theta$ से गुणा करते हैं तो गुणनफल कार्य का मान होगा। परन्तु बल F का किसी बिन्दु के सापेक्ष घूर्ण ज्ञात करने के लिए हम $|F|$ को $|d| \sin \theta$ से गुणा करते हैं तो परिणामित गुणनफल एक सदिश राशि होनी चाहिए क्योंकि घूर्ण की दिशा दक्षिणावर्त या वामावर्त भी हो सकती है।

4.2 अदिश-गुणनफल (Scalar or dot product) या बिन्दु-गुणनफल परिभाषा:—दो सदिश, a, b का अदिश या बिन्दु-गुणनफल एक ऐसा अदिश है जिसका परिमाण दोनों सदिशों के मापान्कों के, और दोनों के बीच के कोण

के कोज्या (Cosine) के गुणनफल के बराबर है। इसको $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}$ से अभिव्यक्त किया जाता है और "a डाट b" पढ़ा जाता है।



यदि $|\mathbf{a}| = a$, और $|\mathbf{b}| = b$ और \mathbf{a} व \mathbf{b} के बीच का कोण θ हो तो

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = ab \cos \theta. \quad (1)$$

\mathbf{a} और \mathbf{b} , गुणनफल के गुणन-गुण्य कहलाते हैं। यदि एक भी गुणन-गुण्य शून्य हो तो बिन्दु-गुणनफल भी शून्य होगा।

$\therefore \cos(-\theta) = \cos \theta$, समीकरण (1) में θ के स्थान पर यदि $-\theta$ भी लें तो कोई अंतर नहीं पड़ता।

समीकरण (1) से

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = a(b \cos \theta) = (a \cos \theta) b = \mathbf{b} \cdot \mathbf{a}. \quad \dots (2)$$

\mathbf{b} का \mathbf{a} की दिशा में घटक $b \cos \theta$ है और \mathbf{a} का \mathbf{b} की दिशा में $a \cos \theta$, इसलिए गुणनफल की परिभाषा दूसरी विधि से भी दी जा सकती है।

अदिश गुणनफल $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}$, दोनों में से एक सदिश के परिमाण तथा दूसरी दिशा में दूसरे सदिश के घटक का गुणनफल है।

4.3. अदिश गुणनफल के गुण।

1. अदिश-गुणनफल कमविनिमेय (Commutative) नियम का पालन करता है। चूँकि ऊपर (4.2) में (2) से स्पष्ट है। और $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = \mathbf{b} \cdot \mathbf{a}$, $(-\mathbf{b}) = (-\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}) = (-\mathbf{a}) \cdot (-\mathbf{b})$.

2. यदि m और n अदिश हों और \mathbf{a} , \mathbf{b} कोई दो सदिश हों तो

$$(m\mathbf{a}) \cdot (n\mathbf{b}) = mn (\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}) = mn \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = n\mathbf{a} \cdot m\mathbf{b}. \quad \dots (1)$$

अर्थात् \mathbf{a} और \mathbf{b} को आपस में बदल-बदल दिया जाय तो भी गुणनफल में कोई परिवर्तन नहीं होता ।

3. चूँकि अदिश-गुणनफल संख्या है इसलिए यह किसी सदिश का संख्यात्मक गुणांक के रूप में भी हो सकता है । जैसे $(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}) \mathbf{c}$ एक \mathbf{c} की दिशा में सदिश है जिसका मापांक $(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})$ है ।

4. किसी सदिश का स्वयम् उससे गुणनफल उसके मापांक का वर्ग होगा क्योंकि

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{a} = a^2 \cos 0 = a^2 = |\mathbf{a}|^2.$$

इसको a^2 से भी निदिष्ट किया जाता है । और यह घन होता है ।

5. दो सदिशों का अदिश-गुणनफल धन, शून्य, या ऋण होगा जैसाकि उनके बीच का कोण न्यून, समकोण, या अधिक कोण है । इससे हम लवकोणीयता (Orthogonality) के नियम का निगमन कर सकते हैं । दो लवकोणीय सदिशों का अदिश-गुणनफल शून्य होगा ।

विलोमत - यदि दो सदिशों का अदिश-गुणनफल शून्य है तो वे लवकोणीय होंगे क्योंकि $\theta = \pi/2$

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = ab \cos \frac{\pi}{2} = 0.$$

विलोमत: $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = 0$ तो $ab \cos \theta = 0$.

परन्तु $a \neq 0, b \neq 0$,

$$\therefore \cos \theta = 0 \text{ or } \theta = \pi/2$$

अतः दो शून्य-रहित सदिशों का अदिश गुणनफल शून्य होगा (if and only if) यदि और केवल यदि वे लवकोणीय हैं ।

6. दो सदिशों के बीच के कोण का कोज्या, उनके अदिश-गुणनफल को उनके मापांकों के गुणनफल से भाग देने पर, भागफल के बराबर है ।

$$\text{या } \cos \theta = \frac{\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}}{|\mathbf{a}| |\mathbf{b}|}.$$

विशेष रूप से यदि \mathbf{a} और \mathbf{b} इकाई सदिश हो तो

$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = \cos \theta$ अर्थात् दो इकाई सदिशों का बिन्दु-गुणनफल उनके बीच के कोण के कोज्या (Cosine) के बराबर होता है ।

4.4 सार्विक-सदिश त्रयी (Orthogonal-Vector triads) के लिए सदिश-गुणनफल

ऐसे तीन इकाई सदिशों का सेट (Set) जो प्रत्येक दूसरे दोनो पर समकोणीय हो लम्बप्रसामान्यक (Orthonormal) कहलाता है। चूँकि किसी भी सदिश को किन्हीं दिए हुए तीन असमतलीय सदिशों में अभिव्यक्त किया जा सकता है। इसलिए किन्हीं असमतलीय-सदिश त्रयी (triads) को आधार लिया जा सकता है। विशेष-स्थिति में यदि तीनों परस्पर लंब हों तो लम्बप्रसामान्यक आधार (Orthonormal base) होगा।

माना i, j, k तीन परस्पर समकोणीय इकाई सदिश हैं। तो

$$i \cdot i = j \cdot j = k \cdot k = 1. \text{ और}$$

$$i \cdot j = j \cdot k = k \cdot i = 0.$$

यह परिणाम निम्न सारणी में दिए गए हैं।

.	i	j	k
i	1	0	0
j	0	1	0
k	0	0	1

4.5 सदिशों का सदिश-गुणनफल योग की क्रिया पर बटन--(distributive) नियम का पालन करता है। अर्थात् यदि a, b, c तीन सदिश हों तो

$$a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c.$$

माना $\vec{OA}, \vec{OB}, \vec{OC}$, सदिश a, b, c को निरूपित करते हैं। तो

$$\vec{OC} = \vec{OB} + \vec{BC}$$

$$= (b + c)$$

... (1)

माना BL और CM बिन्दु B और C से OA पर लम्ब हैं

$$\text{प्रक्षेप } OL = OB \cos AOB$$

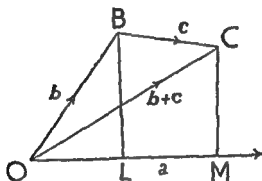
घोर प्रक्षेप $OM = OC \cos AOC$.

LM , BC का OA पर प्रक्षेप है।

$$\text{अब } OM = OL + LM. \quad \dots(1)$$

$$\text{घोर } a \cdot (b + c) = a \cdot \vec{OC} = a \cdot OM. \quad \dots(2)$$

$$a \cdot b = a \cdot OL \quad \dots(3)$$



$$a \cdot c = a \cdot LM \quad \dots(4)$$

(1), (2), (3), (4) से

$$a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c.$$

प्रभीष्ट सम्बन्ध है।

यदि c ऋण हो तो

$$\begin{aligned} a \cdot (b - c) &= a \cdot [b + (-c)] \\ &= a \cdot b + a \cdot (-c) \\ &= a \cdot b - a \cdot c. \end{aligned}$$

उपप्रेषः यदि $a \cdot b = a \cdot c$ तो निम्न में से कम से कम एक सत्य है

या $a = 0$, या $b = c$ अन्यथा $a \cdot (b - c)$ पर सत्य है।

उपपत्ति

$$a \cdot b = a \cdot c,$$

$$\text{या } a \cdot b - a \cdot c = 0,$$

$$\text{या } a \cdot (b - c) = 0,$$

प्रमाण

$$a=0, \text{ या } (b-c)=0,$$

या $a, (b-c)$ पर सम्बन्ध है।

4.6 वटन-नियम का व्यापकीकरण : (Generalisation of distributive law.)

ऊपर 4.5 के परिणाम का बार-बार प्रयोग करने से हम सिद्ध कर सकते हैं कि

$$a(b+c+d+\dots) = a.b + a.c + a.d + \dots$$

या और भी व्यापक रूप से

$$\begin{aligned} (a+b+c+d+\dots)(\vec{p} + \vec{q} + \vec{r} + \dots) &= \\ a.(\vec{p} + \vec{q} + \vec{r} + \dots) + b.(\vec{p} + \vec{q} + \vec{r} + \dots) + c.(\vec{p} + \vec{q} + \vec{r} + \dots) + \dots \\ &= a.\vec{p} + a.\vec{q} + a.\vec{r} + \dots + b.\vec{p} + b.\vec{q} + \dots + c.\vec{p} + c.\vec{q} + \dots + \dots \end{aligned}$$

विशेष रूप में

$$\begin{aligned} (a+b).(a+b) &= a.a + a.b + b.a + b.b \\ &= a^2 + 2a.b + b^2. [\because a.b = b.a] \dots(1) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{इसी प्रकार } (a+b).(a-b) &= a^2 - a.b + b.a - b^2 \\ &= a^2 - b^2 \dots(2) \end{aligned}$$

$$\text{और } (a-b)^2 = a^2 - 2a.b + b^2. \dots(3)$$

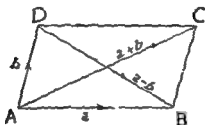
ज्यामिति की दृष्टि में यदि परिणाम (1), (2), और (3) को हम देखें तो समान्तर-चतुर्भुज के गुण प्राप्त होते हैं।

ABCD समान्तर चतुर्भुज है जिसकी भुजा $\overset{\rightarrow}{AB}$ और $\overset{\rightarrow}{AD}$, सदिश a और b निरूपित करती हैं।

$$\vec{AC} = \vec{a} + \vec{b} \quad (4)$$

$$\vec{DB} = \vec{a} - \vec{b} \quad (5)$$

समीकरण (2) से



$$(\vec{a} + \vec{b}) (\vec{a} - \vec{b}) = \vec{AC} \cdot \vec{DB} = \vec{AB}^2 - \vec{AD}^2.$$

अर्थात् किसी समान्तर चतुर्भुज की दो आसन्न भुजाओं के वर्गों का अन्तर उस आसन्न के समान होता है जिसकी एक भुजा तो समान्तर चतुर्भुज के एक विकर्ण के बराबर हो और दूसरी भुजा दूसरे विकर्ण का पहले पर प्रक्षेप के बराबर हो।

4.7 अदिश-गुणनफल को घटकों में अभिव्यक्त करना। (Scalar-product in terms of the Components)

माना \vec{a} और \vec{b} दो सदिशों को इकाई-सदिश $\hat{i}, \hat{j}, \hat{k}$ में लिखा जाता है। अर्थात्

$$\vec{a} = a_1\hat{i} + a_2\hat{j} + a_3\hat{k}, \text{ और}$$

$$\vec{b} = b_1\hat{i} + b_2\hat{j} + b_3\hat{k},$$

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = (a_1\hat{i} + a_2\hat{j} + a_3\hat{k}) \cdot (b_1\hat{i} + b_2\hat{j} + b_3\hat{k})$$

$$= a_1b_1\hat{i} \cdot \hat{i} + a_1b_2\hat{i} \cdot \hat{j} + a_1b_3\hat{i} \cdot \hat{k} + a_2b_1\hat{j} \cdot \hat{i} + a_2b_2\hat{j} \cdot \hat{j}$$

$$+ a_2b_3\hat{j} \cdot \hat{k} + a_3b_1\hat{k} \cdot \hat{i} + a_3b_2\hat{k} \cdot \hat{j} + a_3b_3\hat{k} \cdot \hat{k}$$

[क्योंकि बिन्दु-गुणनफल बटन के नियम का पालन करता है]

परन्तु $\hat{i} \cdot \hat{i} = \hat{j} \cdot \hat{j} = \hat{k} \cdot \hat{k} = 1$, और

$$\hat{j} \cdot \hat{k} = \hat{k} \cdot \hat{i} = \hat{i} \cdot \hat{j} = 0.$$

$$\therefore \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3 = \sum_{i=1}^3 a_i b_i.$$

अतः दो सदिशों का बिन्दु-गुणनफल तदनुस्यू घटकों के गुणनफल के योग के समान होता है।

$$\text{विशेष स्थिति में } \mathbf{a} \cdot \mathbf{a} = a_1^2 + a_2^2 + a_3^2.$$

पुनः यदि \mathbf{a} और \mathbf{b} के बीच का कोण θ हो तो

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = ab \cos \theta = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3$$

$$\begin{aligned} \text{या } \cos \theta &= \frac{a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3}{ab} \\ &= \frac{a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2} \cdot \sqrt{b_1^2 + b_2^2 + b_3^2}} \quad \dots (1) \end{aligned}$$

यह सूत्र $\cos \theta$ का सदिश \mathbf{a} , \mathbf{b} के घटकों में मान ज्ञात करने के लिए है।

पुनः यदि (l_1, m_1, n_1) और (l_2, m_2, n_2) , क्रमशः \mathbf{a} , \mathbf{b} के दिक्को-ज्या ($d.c$) हों तो

$$l_1 = \frac{a_1}{a}, \quad l_2 = \frac{b_1}{b},$$

$$m_1 = \frac{a_2}{a}, \quad m_2 = \frac{b_2}{b},$$

$$n_1 = \frac{a_3}{a}, \quad n_2 = \frac{b_3}{b}.$$

$$\therefore \cos \theta = l_1 l_2 + m_1 m_2 + n_1 n_2 \quad \dots (2)$$

यदि \mathbf{r} कोई सदिश है और

$$\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k} \quad \dots (3)$$

तो (3) में दोनों ओर \mathbf{i} , \mathbf{j} , \mathbf{k} से गुणा करने पर

$$r \cdot \mathbf{i} = x; \quad r \cdot \mathbf{j} = y; \quad r \cdot \mathbf{k} = z, \quad \dots (4)$$

$$\therefore \mathbf{r} = (r \cdot \mathbf{i})\mathbf{i} + (r \cdot \mathbf{j})\mathbf{j} + (r \cdot \mathbf{k})\mathbf{k} \quad \dots (5)$$

अतः हम देखते हैं कि सदिश r के, संवप्रसामान्यक आधार i, j, k (Ortho-normal base) के सापेक्ष निर्देशांक

$$r.i, r.j, r.k \text{ हैं।} \quad \dots (6)$$

4.8 स्वेच्छ आधार (Arbitrary Bases)

माना a, b, c तीन असमतलीय सदिश हैं और r एक स्वेच्छ सदिश है। हम x, y, z तीन अदिश राशियाँ ऐसी ज्ञात कर सकते हैं कि

$$r = xa + yb + zc \quad \dots (1)$$

दोनों ओर a, b, c का क्रम से गुणा करने पर

$$r.a = xa.a + yb.a + zc.a. \quad \dots (2)$$

$$r.b = xa.b + yb.b + zc.b. \quad \dots (3)$$

$$r.c = xa.c + yb.c + zc.c. \quad (4)$$

समीकरण (1), (2), (3), (4) में से x, y, z का निरसन (eliminate) करने पर

$$\begin{vmatrix} r & a & b & c \\ r.a & a.a & b.a & c.a \\ r.b & a.b & b.b & c.b \\ r.c & a.c & b.c & c.c \end{vmatrix} = 0. \quad \dots (5)$$

चूँकि योग तथा सदिशों का अदिशों से गुणन के नियम साधारण अंकों के नियमों के अनुरूप हैं इसलिए निरसन उचित है।

$$\text{माना} \quad \Delta = \begin{vmatrix} a.a & b.a & c.a \\ a.b & b.b & c.b \\ a.c & b.c & c.c \end{vmatrix} \quad \dots (6)$$

और a, b, c तीन असमतलीय सदिश हैं तो $\Delta \neq 0$ ।

(5) में सारणिक (determinant) का विस्तार करने पर और Δ भाग देने से

$$\begin{aligned} r &= \frac{1}{\Delta} \begin{vmatrix} r.a & b.a & c.a \\ r.b & b.b & c.b \\ r.c & b.c & c.c \end{vmatrix} - \frac{1}{\Delta} \begin{vmatrix} r.a & a.a & c.a \\ r.b & a.b & c.b \\ r.c & a.c & c.c \end{vmatrix} \\ &+ \frac{1}{\Delta} \begin{vmatrix} r.a & a.a & b.a \\ r.b & a.b & b.b \\ r.c & a.c & b.c \end{vmatrix} c. \end{aligned}$$

विश्लेष-स्थिति में यदि r, a, b समतलीय हैं तो

$$r = \frac{\begin{vmatrix} ra & ab \\ r.b & bb \end{vmatrix} a + \begin{vmatrix} aa & ra \\ ab & rc \end{vmatrix} b}{a^2b^2 - (a.b)^2}$$

उदाहरण — 1. सिद्ध करो कि सदिश $a = 2i - j + k$,

$b = i - 3j - 5k$ और $c = 3i - 4j - 4k$ एक समकोण त्रिभुज के शीर्ष हैं। [संलग्नक 52, 56 इलाहाबाद 58]

हम देखते हैं कि

$$\begin{aligned} a + b &= (2i - j + k) + (i - 3j - 5k) \\ &= 3i - 4j - 4k = c. \end{aligned}$$

$\therefore a, b, c$ एक त्रिभुज के शीर्ष हैं

$$\begin{aligned} \text{अब } a.b &= (2i - j + k). (i - 3j - 5k) \\ &= 2 + 3 - 5 = 0. \end{aligned}$$

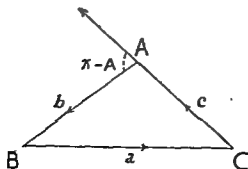
इसलिए a, b एक दूसरे पर लम्ब हैं।

अतः त्रिभुज a, b, c समकोण त्रिभुज बनाते हैं।

2 किसी त्रिभुज ABC में सिद्ध करो कि

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A \quad [\text{संलग्नक 61, कलकत्ता 57, 61}]$$

माना त्रिभुज ABC की भुजाएँ



$\vec{BC}, \vec{CA}, \vec{AB}$ क्रमशः सदिश a, b, c निरूपित करती है। तो

$$b + c = -a, \quad \dots(1)$$

दोनों ओर वर्ग करने पर

$$(-a)^2 = (b+c)(b+c),$$

$$\text{या } a^2 = b^2 + c^2 + 2b \cdot c$$

$$\text{या } a^2 = b^2 + c^2 + 2bc \cos(\pi - A)$$

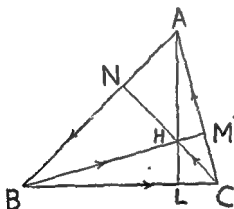
$$= b^2 + c^2 - 2bc \cos A \quad \dots(2)$$

3. सिद्ध करो कि किसी त्रिभुज में शीर्षों से सम्मुख भुजाओं पर लीचे गए लंब सगामी होते हैं।

[अखनऊ 54, 60, 64, दिल्ली 60, उत्कल 53]

माना A, B, C के स्थिति-सदिश, किसी मूलबिन्दु O के सापेक्ष,

क्रमशः a, b, c हैं।



माना B और C से लीचे गए सम्मुख भुजाओं पर लम्ब एक दूसरे को H पर काटते हैं। और H का स्थिति-सदिश h है।

$$\left. \begin{aligned} \vec{BH} &= h - b, \\ \vec{CH} &= h - c, \\ \vec{CA} &= a - c, \\ \vec{AB} &= b - a, \end{aligned} \right\} \quad \dots(1)$$

$$\vec{BM} = k\vec{BH} = k(h-b) \quad \dots(2)$$

$$\text{इसी प्रकार } \vec{CN} = l\vec{CH} = l(h-c). \quad \dots(3)$$

जबकि k और l अदिश संख्या है।

$$\vec{BM} \perp \vec{CA}$$

$$\therefore k(h-b) \cdot (a-c) = 0, \text{ या } (h-b) \cdot (a-c) = 0. \quad \dots(4)$$

$$\text{और } \vec{CN} \perp \vec{AB}$$

$$\therefore l(h-c) \cdot (b-a) = 0 \text{ या } (h-c) \cdot (b-a) = 0. \quad \dots(5)$$

(4) और (5) को जोड़ने से

$$h \cdot (b-c) - a \cdot (b-c) = 0.$$

$$\text{या } (h-a) \cdot (b-c) = 0. \quad \dots(6)$$

$$\text{अर्थात् } \vec{AH} \cdot \vec{BC} = 0,$$

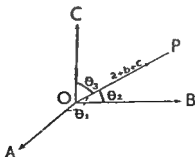
या \vec{AH} , \vec{BC} पर लम्ब

अतः तीनों लम्ब H पर मिलते हैं।

4. यदि सदिश a, b, c एक-दूसरे पर लम्ब हों और उनके मापक समान हों तो सिद्ध करो कि $a+b+c$ प्रत्येक के साथ बराबर का कोण बनाता है।

माना मूल-बिन्दु O है और

$$\vec{OA} = a, \vec{OB} = b, \vec{OC} = c.$$



तो $|a| = |b| = |c| = a$.

$$\vec{OP} = a + b + c.$$

यदि

$$(a + b + c) \cdot (a + b + c) \\ = a^2 + b^2 + c^2 + 2a \cdot b + 2b \cdot c + 2c \cdot a,$$

चूँकि a, b, c एक-दूसरे पर लम्ब हैं।

$$a \cdot b = b \cdot c = c \cdot a = 0$$

$$\therefore (a + b + c)^2 = 3a^2 = 3a^2.$$

$$\text{या } OP = |a + b + c| = \sqrt{3}a. \quad \dots(1)$$

$$\text{माना } \angle AOP = \theta_1, \angle BOP = \theta_2, \angle COP = \theta_3.$$

$$\vec{OP} \cdot a = (a + b + c) \cdot a = a^2 = OP \cdot a \cos \theta_1 = \sqrt{3}a^2 \cos \theta_1$$

$$\text{या } \cos \theta_1 = \frac{1}{\sqrt{3}}.$$

$$\text{इसी प्रकार } \cos \theta_2 = \cos \theta_3 = \frac{1}{\sqrt{3}}.$$

5. किसी चतुष्फलक (tetrahedron) में सम्मुख भुजाओं के दो युग्म ऐसे हो कि वह एक-दूसरे पर लम्ब हों। तो सिद्ध करो कि तीसरे जोड़े की भी सम्मुख भुजाएँ एक-दूसरे पर लम्ब होगी और दो सम्मुख भुजाओं के वर्गों का योग प्रत्येक युग्म के लिए समान है।

[भागरा 53, 62, 66, उत्कल 52,
कलकत्ता 50, विक्रम 63, दिल्ली 53]

OABC एक चतुष्फलक है। माना O के सापेक्ष A, B, C के स्थिति-सदिश a, b, c हैं। तब

$$\vec{AB} = b - a,$$

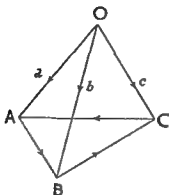
$$\vec{BC} = c - b,$$

$$\vec{CA} = a - c,$$

$$\therefore \vec{AB} \perp \vec{OC},$$

$$\therefore c \cdot (b - a) = 0. \quad \dots (1)$$

और $\vec{OB} \perp \vec{CA}$



$$\therefore b \cdot (a - c) = 0. \quad \dots (2)$$

(1) और (2) से जोड़ने पर

$$b \cdot a - c \cdot a = 0.$$

$$\text{या } a \cdot (b - c) = 0. \quad \dots (3)$$

(3) से स्पष्ट है कि $\vec{BC} \perp \vec{OA}$.

$$\begin{aligned} \text{अब } (OB)^2 + (CA)^2 &= b^2 + (a - c)^2 \\ &= b^2 + c^2 + a^2 - 2a \cdot c \end{aligned} \quad \dots (4)$$

$$OA^2 + BC^2 = a^2 + c^2 + b^2 - 2b \cdot c \quad \dots (5)$$

$$\text{और } OC^2 + AB^2 = a^2 + b^2 + c^2 - 2a \cdot b. \quad \dots (6)$$

(1), (2) और (3) से

$$a \cdot b = b \cdot c = c \cdot a$$

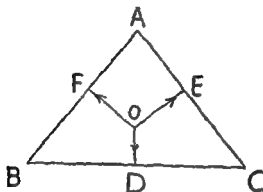
$$\therefore (4) = (5) = (6)$$

यही सिद्ध करना था ।

6. सिद्ध करो कि प्रत्येक त्रिभुज में भुजाओं के लम्ब-समद्विभाजक सगामी होते हैं । [लखनऊ 63]

D, E, F क्रमशः भुजाओं BC, CA, AB के मध्य बिन्दु हैं। श्री माना D, E पर लम्ब, O पर एक-दूसरे को काटते हैं।

माना a, b, c और \vec{m} क्रमशः A, B, C और O के स्थिति-सदिश हैं।



$$\vec{OD} = \frac{b+c}{2} - \vec{m} \quad \dots(1)$$

परन्तु $OD \perp BC$

$$\therefore \left(\frac{b+c}{2} - \vec{m} \right) \cdot (c-b) = 0. \quad \dots(2)$$

इसी प्रकार $OE \perp CA$

$$\therefore \left(\frac{c+a}{2} - \vec{m} \right) \cdot (a-c) = 0. \quad \dots(3)$$

(2) और (3) को जोड़ने से

$$\left(\frac{a+b}{2} - \vec{m} \right) \cdot (a-b) = 0. \quad \dots(4)$$

अर्थात् OF, AB पर लम्ब है

7. त्रिभुज ABC के आधार BC पर एक बिन्दु G ऐसा लिया गया है कि $m BG = n GC$, तो सिद्ध करो कि

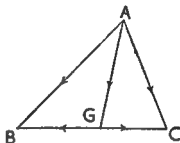
$$m AB^2 + n AC^2 = m BG^2 + n CG^2 + (m+n) AG^2$$

माना A, B, C के स्थिति-सदिश क्रमशः \mathbf{a} , \mathbf{b} , \mathbf{c} हैं।

$$\vec{BC} = \mathbf{c} - \mathbf{b},$$

$$\vec{BG} = \frac{n}{m+n} \vec{BC},$$

$$\vec{GC} = \frac{m}{m+n} \vec{BC},$$



$$\text{बिन्दु G का स्थिति-सदिश} = \frac{mb + nc}{m+n} \quad \dots (1)$$

$$\vec{AB} = \vec{AG} + \vec{GB} \quad \dots (2)$$

$$\vec{AC} = \vec{AG} + \vec{GC} \quad \dots (3)$$

(2) और (3) से

$$m(\vec{AB})^2 + n(\vec{AC})^2 = m(\vec{AG}^2 + \vec{GB}^2 + 2\vec{AG} \cdot \vec{GB}) + n(\vec{AG}^2 + \vec{GC}^2 + 2\vec{AG} \cdot \vec{GC})$$

$$= (m+n) \vec{AG}^2 + m \vec{GB}^2 + n \vec{GC}^2 + 2 \vec{AG} \cdot (m\vec{GB} + n\vec{GC})$$

$$= (m+n) \vec{AG}^2 + m \vec{GB}^2 + n \vec{GC}^2 + 2\vec{AG} \cdot (0) \quad \dots (4)$$

$$\text{क्योंकि } m \vec{GB} + n \vec{GC} = -m\vec{BG} + n\vec{GC} = 0.$$

विशेष स्थिति में यदि G, BC का मध्य बिन्दु है तो $m = n$

अतः

$$AB^2 + AC^2 = 2AG^2 + 2GB^2. \quad \dots (5)$$

प्रश्नावली न० 6

1. सिद्ध करो कि एक समबाहु चतुर्भुज के विकर्ण एक-दूसरे को समकोण पर काटते हैं। [लखनऊ 50, आगरा 57]
2. सिद्ध करो कि वह समान्तर चतुर्भुज जिसके विकर्ण एक-दूसरे को समकोण पर काटते हैं, आयत है। [लखनऊ 63]
3. सिद्ध करो कि किसी समद्विबाहु त्रिभुज में आधार की माध्यिका उस पर लम्ब होती है।
4. सिद्ध करो कि किसी समकोण त्रिभुज के कर्ण (hypotenuse) के मध्य बिन्दु की उसके शीर्षों से दूरी समान होती है। [पंजाब 60]
5. निम्न सदिशों के बीच के कोण का ज्या (sine) और कोज्या (cosine) ज्ञात करो।

$$(i) \mathbf{a} = 3\mathbf{i} + \mathbf{j} + 2\mathbf{k},$$

$$\mathbf{b} = 2\mathbf{i} - 2\mathbf{j} + 4\mathbf{k}$$

[लखनऊ 50, 60, इलाहाबाद 59]

$$(ii) \mathbf{a} = 4\mathbf{i} + 3\mathbf{j} + \mathbf{k},$$

$$\mathbf{b} = 2\mathbf{i} - \mathbf{j} + 2\mathbf{k},$$

[इलाहाबाद 59, लखनऊ 60]

6. दिया हुआ है कि सदिश

$$\mathbf{a} = a_1\mathbf{i} + a_2\mathbf{j} + a_3\mathbf{k}, \text{ और } \mathbf{b} = b_1\mathbf{i} + b_2\mathbf{j} + b_3\mathbf{k}.$$

- (i) \mathbf{a} और \mathbf{b} समान्तर होंगे यदि और केवल यदि (If and only if)

$$a_1 : a_2 : a_3 = b_1 : b_2 : b_3.$$

- (ii) \mathbf{a} और \mathbf{b} लम्ब होंगे (iff) यदि और केवल यदि

$$a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3 = 0.$$

7. यदि \mathbf{a} और \mathbf{b} इकाई सदिश हो और उनके बीच का कोण θ हो तो, सिद्ध करो कि

$$\sin \frac{\theta}{2} = \frac{1}{2} |\mathbf{a} - \mathbf{b}|.$$

[राजस्थान 70]

$$[\text{सकेत } (a-b)^2 = 2 - 2 \cos \theta]$$

8. यदि सदिश a और b के परिणाम a और b हों तो सिद्ध करो कि

$$\left(\frac{a}{a^2} - \frac{b}{b^2}\right)^2 = \left(\frac{a-b}{ab}\right)^2.$$

9. सदिश की विधि से सिद्ध करो कि किसी त्रिभुज ABC में

$$a = b \cos C + c \cos B. \quad [\text{ससमक 61}]$$

10. सदिश की विधि से सिद्ध करो कि

$$(a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3)^2 \leq (a_1^2 + a_2^2 + a_3^2)(b_1^2 + b_2^2 + b_3^2)$$

$$[\text{सकेत समीकरण 4.7 (1) से } \cos \theta \leq 1.]$$

11. सिद्ध करो कि एक सम-चतुष्फलक की सम्मुख भुजाएँ परस्पर लंब होती हैं। [भाग 65]

12. सदिश की विधि से सिद्ध करो कि एक सम-चतुष्फलक के किसी दो समतलों के बीच का कोण $\cos^{-1} \frac{1}{3}$ होता है। [दिल्ली 62]

13. किसी बाह्य बिन्दु O से ON के एक समतल पर लम्ब डाला गया है और उसमें स्थित एक रेखा PQ पर OM लम्ब है। सिद्ध करो कि MN, PQ पर लम्ब है। [पटना 59]

14. यदि a, b, c समतलीय हैं और a, b के समांतर नहीं हैं तो सिद्ध करो कि

$$c = \frac{\begin{vmatrix} c.a & a.b \\ c.b & b.b \end{vmatrix} \begin{vmatrix} a.a & c.a \\ a.b & c.b \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a.a & a.b \\ a.b & b.b \end{vmatrix}}. \quad [\text{पटना 58}]$$

- [सकेत $xa + yb + zc = 0$, a, b में गुणा करके x, y, z का निरसन करो।]

15. सिद्ध करो कि यदि $|a+b| = |a-b|$ तो a, b एक-दूसरे पर लंब हैं।

16. OABC एक चतुष्फलक में OA, BC पर लम्ब है तो सिद्ध करो कि $OB^2 + CA^2 = OC^2 + AB^2$.

17. एक घन के दो विकर्णों के बीच का कोण ज्ञात करो।

18. A, B, C, D कोई चार बिन्दु हैं, तो सिद्ध करो कि

$$\vec{AB} \cdot \vec{CD} + \vec{BC} \cdot \vec{AD} + \vec{CA} \cdot \vec{BD} = 0.$$

19. ABCD एक समलम्ब है जिसकी भुजा BC और AD समान्तर हैं तो सिद्ध करो कि

$$AC^2 + BD^2 = AB^2 + CD^2 + 2 \vec{BC} \cdot \vec{AD}.$$

20. वह इकाई सदिश ज्ञात करो जो दोनों सदिशों (2, 1, 1) और (3, 2, -1) पर लम्ब हो। इन सदिशों के बीच का कोण भी ज्ञात करो।

[सकेत माना इकाई सदिश (x, y, z) है। यह दोनों पर लम्ब है और $x^2 + y^2 + z^2 = 1$.]

21. यदि एक सीधी-रेखा किन्हीं तीन समतलीय रेखाओं पर लम्ब है तो वह उस समतल पर भी लम्ब होगी।

22. यदि इकाई-सदिश \hat{n} के समान्तर एक सरल रेखा का समीकरण

$$r = a + n \hat{b} \text{ हो, तो सिद्ध करो कि मूलबिन्दु से होकर जाने वाली}$$

और इस पर लम्ब रेखा का समीकरण

$$r = m [a - (\hat{a} \cdot \hat{b}) \hat{b}], \text{ और मूलबिन्दु से दी हुई रेखा पर लम्ब की}$$

लम्बाई

$$\sqrt{a^2 - (\hat{a} \cdot \hat{b})^2} \text{ है। [संलग्नक 49, 52, 58, इलाहाबाद 59]}$$

23. यदि a, b, c असमतलीय-सदिश हों और

$$p \cdot a = p \cdot b = p \cdot c = 0. \text{ तो, } p \text{ एक शून्य-सदिश होगा।}$$

24. m_1, m_2, m_3, \dots संहति के कुछ कण बिन्दु A, B, C पर रसे गए हैं और G इनका संहति-केन्द्र है। यदि \vec{r} कोई बिन्दु हो तो सिद्ध करो कि

$$\begin{aligned}
 & m_1 AP^2 + m_2 BP^2 + m_3 CP^2 + \dots \\
 &= m_1 AG^2 + m_2 BG^2 + m_3 CG^2 + \dots + \\
 & \quad (m_1 + m_2 + m_3 + \dots) PG^2. \quad /
 \end{aligned}$$

[संवेत G को मूल-बिन्दु लो ।]

4.9 सदिश-गुणनफल या वज्जीय गुणनफल । (Vector Product or cross-Product.)

4.91 परिचय ।

हमें प्रायः ऐसी सदिश-राशियाँ भी मिलती हैं जो दूसरे दो सदिशों पर इस प्रकार माधित होती हैं कि वे इन दोनों के परिमाण के और दोनों के बीच के कोण के (sine) ज्या के समानुपाती होती हैं; और उनकी दिशा इन दोनों पर लम्ब होती है। अतः हम निम्नांकित परिभाषा प्राप्त करते हैं।

4.92 परिभाषा :—दो सदिश a और b का सदिश या वज्जीय-गुणनफल एक ऐसा सदिश है जिसका परिमाण $|a| |b| \sin \theta$ है (θ सदिश a और b के बीच का कोण है) और वह a और b दोनों पर लम्ब होता है और a से b की ओर घूर्णन के सापेक्ष इसकी दिशा घन होती है इसको $a \times b$ लिखा जाता है। a cross (वज्ज) b .

$$\text{अतः } a \times b = ab \sin \theta \hat{n}.$$

जहाँ \hat{n} इकाई-सदिश है जोकि a और b के समन्तल पर लम्ब होता है। और a से b की ओर घूर्णन से दक्षिणावर्ती पंच के बढ़ने की दिशा में घन होता है।

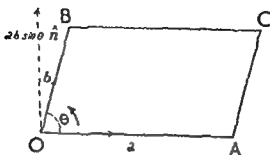
4.10 सदिश-गुणनफल की ज्यामितिय व्याख्या (सदिश-क्षेत्रफल) (Geometrical interpretation of the vector-product. (Vector area))

माना OACB एक समान्तर-चतुर्भुज है जिसकी आसन्न भुजाएँ

\vec{OA} और \vec{OB} क्रमशः सदिश a और b निरूपित करती हैं। और

उनके बीच का कोण θ है। अब समान्तर चतुर्भुज का क्षेत्रफल

$$= ab \sin \theta. \dots(1)$$



a और b के समतल के लंबतः इकाई सदिश \hat{n} है। a, b और \hat{n} एक दक्षिणावर्ती त्रिक बनाते हैं।

सदिश-क्षेत्रफल $OACB$ is

$$a \times b = ab \sin \theta \hat{n}. \dots(2)$$

क्षेत्रफल $OACB$ की सीमा इस क्रम से गयी गई है कि

$$O \rightarrow A \rightarrow C \rightarrow B \rightarrow O.$$

कोई भी समतल-क्षेत्र एक सदिश c द्वारा निरूपित किया जा सकता है, जिसकी परिभाषा निम्न रूप से है।

i c की लम्बाई की इकाई की संख्या = दिए हुए क्षेत्रफल की इकाई की संख्या

ii सदिश की दिशा क्षेत्रफल के तल पर लम्ब होती है।

iii c की अभिदिशा (sense) ऐसी होती है कि क्षेत्रफल का सीमा वक्र



सीचने की दिशा और c की अभिदिशा दोनों दृष्टिणावर्ती पेष के अनुरूप होते हैं।

टिप्पणी:—सदिश-गुणनफल और अभिदिश-गुणनफल में भेद दिखाने के लिए सदिश-गुणनफल में दो सदिशों के बीच \times लिखा जाता है और अभिदिश-गुणनफल में \cdot (बिन्दु) लिखा जाता है। सदिश-गुणनफल को इसलिए (cross-product) बन्धीय गुणनफल कहते हैं। यह बाह्य गुणनफल (outer-product) भी कहलाता है। कई लेखक इसे $[ab]$ या $a \Delta b$ से भी सूचित करते हैं।

4.11 एक महत्वपूर्ण सम्बन्ध। (an important relation)

$$(a \times b)^2 = a^2 b^2 - (a \cdot b)^2.$$

उपपत्ति: हमें प्राप्त है कि

$$(a \times b) \cdot (a \times b) = [a] [b] \sin \theta]^2.$$

$$= a^2 b^2 \sin^2 \theta \quad \hat{a} \hat{a} = a^2 b^2 \sin^2 \theta.$$

$$= a^2 b^2 (1 - \cos^2 \theta) = a^2 b^2 - (ab \cos \theta)^2$$

$$= a^2 b^2 - (a \cdot b)^2 = \begin{vmatrix} a \cdot a & a \cdot b \\ a \cdot b & b \cdot b \end{vmatrix} \dots (1)$$

(1) से सदिश $a \times b$ का परिमाण बिन्दु-गुणनफल से प्राप्त होता है।

अर्थात् $a \cdot a$, $b \cdot b$, और $a \cdot b$ में।

4.12 सदिश-गुणनफल के गुण (Properties of cross-product)

दो समान्तर सदिशों का बन्धीय-गुणनफल शून्य-सदिश होता है।

क्योंकि दो समान्तर सदिशों के बीच का कोण 0° या π होता है और चूँकि $\sin 0^\circ = \sin \pi = 0$

$$\therefore a \times b = ab \sin 0 = 0. \quad \dots (1)$$

विशेष स्थिति में $a \times a = 0.$ - (2)

2. सदिश-गुणनफल अविनिमेय (Commutative) नियम का पालन नहीं करता।

4.10 से स्पष्ट है कि सदिश $a \times b$ और $b \times a$ दोनों का परिमाण तो समान है परन्तु उनकी दिशाएँ एक-दूसरे के विपरीत हैं। अतः

$$a \times b = -b \times a.$$

इसलिए सदिश-गुणनफल क्रमविनिमेय नियम का पालन नहीं करता यदि गुणन में क्रम बदल दिया जाय तो गुणनफल का चिह्न भी बदल जाता है।

3. यदि m और n दो अदिश हों और a, b दो सदिश हों तो

$$(m a) \times (n b) = mn (a \times b) = n a \times m b.$$

$$\text{उपपत्ति. } (m a) \times (n b) = (ma) (nb) \sin \theta \hat{n}$$

$$= mn (ab \sin \theta \hat{n}).$$

$$= mn (a \times b). \quad [\because a \text{ और } b, ma \text{ और } nb \text{ के समान्तर हैं}]$$

$$\therefore \theta \text{ और } \hat{n}, a \times b \text{ के लिए भी वही हैं}]$$

यदि m और n को बदल-बदल कर दें तो भी परिणाम में कोई अन्तर नहीं पड़ता।

4. दो सदिशों के बीच के कोण का ज्या (sine) उनके सदिश-गुणनफल के मापांक को, उनके मापांकों के गुणनफल से भाग देने पर, भागफल के बराबर होता है। अर्थात्

$$\sin \theta = \frac{|a \times b|}{|a| |b|}$$

5. वंटन-नियम (distributive law)

प्रमेय: सदिशों का सदिश-गुणनफल सदिश-योग पर वंटन-नियम का पालन करता है। अर्थात्

$$a \times (b + c) = a \times b + a \times c.$$

[भाग 67, राज० 68]

पहली विधि:--

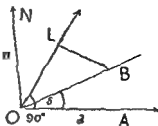
\vec{OA} और \vec{OB} दो सदिश क्रमशः.

a और b हैं।

$$a \times b = ab \sin \hat{n} \dots (1)$$

जोकि समतल AOB पर

सम्बन्ध ON की दिशा में है।



बिन्दु O में से गुजरने वाला एक समतल ऐसा लीजो जो OA के सम्बन्ध हो। माना इस समतल पर OB का प्रक्षेप OL है।

$$\text{स्पष्ट है कि } |\vec{OL}| = b \sin \theta. \dots (2)$$

और \vec{OL} , \vec{OA} , \vec{OB} समतलीय हैं।

$$\text{अब } a \times \vec{OL} = ab \sin \theta \hat{n} = a \times b \text{ [(1) से]} \dots (3)$$

हम अब $a \times b$ का अर्थ इस प्रकार भी ले सकते हैं कि यह ऐसा सदिश है जो सदिश \vec{OL} को \vec{OA} -अक्ष के सापेक्ष 90° से घुमा कर (यन दिशा में) उसको a से गुणा करने से प्राप्त होता है।

अब सदिशों $(b+c)$, b , और c पर विचार करें।

किसी भी समतल पर $(b+c)$ का लम्बकोणीय प्रक्षेप, उस तल पर b और c के प्रक्षेपों के योग के बराबर होता है।

इस परिणाम से हम OA पर संवत समतल पर इनके प्रक्षेपों का विचार करते हैं। $(b+c)$ का प्रक्षेप, b और c के प्रक्षेपों के योग के समान होगा। और यदि 90° से घुमा OA के प्रति घुमा दिया जाय तो भी समानता बनी रहेगी।

अतः $(b+c)$ द्वारा प्राप्त सदिश $\approx b$ और c द्वारा प्राप्त सदिशों के योग के।

इनको दोनों ओर a से गुणा करने पर भी समानता बनी रहेगी।

$$\text{अतः } a \times (b+c) \approx a \times b + a \times c.$$

दूसरी विधि:—

$$\text{माना सदिश } \vec{p} = \vec{a} \times (\vec{b} + \vec{c}) - \vec{a} \times \vec{b} - \vec{a} \times \vec{c}. \quad \dots(1)$$

किसी सदिश \vec{r} से दोनों ओर अदिश-गुणा करने पर

$$\begin{aligned} \vec{r} \cdot \vec{p} &= \vec{r} \cdot [\vec{a} \times (\vec{b} + \vec{c}) - \vec{a} \times \vec{b} - \vec{a} \times \vec{c}] \\ &= \vec{r} \cdot \vec{a} \times (\vec{b} + \vec{c}) - \vec{r} \cdot \vec{a} \times \vec{b} - \vec{r} \cdot \vec{a} \times \vec{c}. \end{aligned}$$

(\therefore अदिश-गुणनफल बटन के नियम का पालन करता है)

अब बिंदु (\circ) और (\times) चिह्न को यदि आपस में बदल दे तो व्यंजक में कोई अन्तर नहीं होगा [देखो अध्याय 5 त्रिक-गुणनफल]

$$\text{अतः } \vec{r} \cdot \vec{p} = (\vec{r} \times \vec{a}) \cdot (\vec{b} + \vec{c}) - (\vec{r} \times \vec{a}) \cdot \vec{b} - (\vec{r} \times \vec{a}) \cdot \vec{c}$$

\therefore अदिश-गुणनफल बटन के नियम का पालन करता है

$$\therefore \vec{r} \cdot \vec{p} = (\vec{r} \times \vec{a}) \cdot \vec{b} + (\vec{r} \times \vec{a}) \cdot \vec{c} - (\vec{r} \times \vec{a}) \cdot \vec{b} - (\vec{r} \times \vec{a}) \cdot \vec{c}$$

$$\text{या } \vec{r} \cdot \vec{p} = 0. \quad \dots(2)$$

$$\text{चूँकि } \vec{p} \text{ एक स्वेच्छ सदिश है इसलिए } \vec{p} = 0. \quad \dots(3)$$

$$\text{अतः } \vec{a} \times (\vec{b} + \vec{c}) - \vec{a} \times \vec{b} - \vec{a} \times \vec{c} = 0.$$

$$\text{या } \vec{a} \times (\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} \times \vec{b} + \vec{a} \times \vec{c}. \quad \dots(4)$$

$$\text{उप-प्रमेय 1. पुनः } (\vec{b} + \vec{c}) \times \vec{a} = -\vec{a} \times (\vec{b} + \vec{c}),$$

$$\begin{aligned} \therefore (\vec{b} + \vec{c}) \times \vec{a} &= -\vec{a} \times \vec{b} + (-\vec{a}) \times \vec{c} \\ &= \vec{b} \times \vec{a} + \vec{c} \times \vec{a}. \end{aligned} \quad \dots(5)$$

$$\text{उप-प्रमेय 2 } \vec{a} \times (\vec{b} - \vec{c}) = \vec{a} \times [\vec{b} + (-\vec{c})].$$

$$\begin{aligned} &= \vec{a} \times \vec{b} + \vec{a} \times (-\vec{c}). \\ &= \vec{a} \times \vec{b} - \vec{a} \times \vec{c}. \end{aligned} \quad \dots(6)$$

ऊपर का नियम किन्हीं संख्याओं के लिए सत्य है। अतः

$$(\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} \dots) \times (\vec{p} + \vec{q} + \vec{r} \dots)$$

$$= a \times p + a \times q + a \times r + \dots + b \times p$$

$$+ b \times q + b \times r + \dots + c \times p + c \times q + c \times r + \dots + \dots$$

नोट: 1 यदि $a \times b = a \times c$ तो $a \times (b - c) = 0$.

अर्थात् या तो $a = 0$, या $b = c$ अन्यथा a और $(b - c)$ समान्तर हैं।

नोट 2. यह सावधानी रहे कि सदिश-गुणनफल में गुणन-खण्डों के क्रम को न बदला जाए।

4.13 लवप्रसामान्यक त्रयी। (orthonormal triads)

यदि i, j, k तीन परस्पर समकोणीय-इकाई सदिश हों जोकि दक्षिण-वर्ती पद्धति बनाते हैं तो

$$i \times i = j \times j = k \times k = 0.$$

$$\text{और } i \times j = k, j \times k = i, \text{ और } k \times i = j.$$

इनको निम्न सारणी के रूप में भी अभिव्यक्त किया जा सकता है

x	i	j	k
i	0	k	$-j$
j	k	0	i
k	$-j$	i	0

4.14 सदिश-गुणनफल को घटकों में अभिव्यक्त करना। (vector product in terms of components)

माना a और b दो ऐसे सदिश हैं कि

$$a = a_1 i + a_2 j + a_3 k, \quad b = b_1 i + b_2 j + b_3 k$$

$$a \times b = (a_1 i + a_2 j + a_3 k) \times (b_1 i + b_2 j + b_3 k).$$

$$= (a_1 b_2 k - a_1 b_3 j - a_2 b_1 k + a_2 b_3 i + a_3 b_1 j - a_3 b_2 i) -$$

$$= (a_2 b_3 - a_3 b_2) i + (a_3 b_1 - a_1 b_3) j + (a_1 b_2 - a_2 b_1) j$$

परिणाम (1) को सारणिक के रूप में भी दिया सकते हैं।(1)

$$\begin{vmatrix} i & j & k \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} \quad \dots(2)$$

समीकरण (1) से हमें प्राप्त है

$$a \times b = ab \sin \theta \hat{n} = (a_2b_3 - a_3b_2)\hat{i} + (a_3b_1 - a_1b_3)\hat{j} + (a_1b_2 - a_2b_1)\hat{k} \quad \dots(3)$$

दोनों घोर वर्ग करने पर घोर बिन्दु-गुणनफल का उपयोग करते से प्राप्त है

$$a^2b^2 \sin^2 \theta = (a_1b_3 - a_3b_1)^2 + (a_3b_2 - a_2b_3)^2 + (a_1b_2 - a_2b_1)^2 \quad \dots(4)$$

$$\text{या } \sin^2 \theta = \frac{(a_2b_3 - a_3b_2)^2}{(a_1^2 + a_2^2 + a_3^2)(b_1^2 + b_2^2 + b_3^2)} \quad \dots(5)$$

सूत्र (1) से, दो सदिशों के बीच का कोण उनके घटकों में ज्ञात कर सकते हैं।

उप-प्रमेय: यदि सदिश a और b किन्हीं तीन सदिशों के एक-पाततः संवय में दिए हुए हों, अर्थात्

$$a = a_1i + a_2j + a_3k \text{ और}$$

$$b = b_1i + b_2j + b_3k \quad \text{तो}$$

$$a \times b = \begin{vmatrix} i & j & k \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix}$$

उप-प्रमेय.1. यदि $b = c + na$ जबकि n एक अदिश राशि है।

$$\text{तो } a \times b = a \times c \quad (\because a \times a = 0)$$

इसके विलोमतः यदि $a \times b = a \times c$ और a शून्य-सदिश न हो तो इससे यह अनुमान नहीं लगाया जा सकता कि $b = c$ परन्तु b और c में एक a के समान्तर सदिश का अन्तर होना जोकि शून्य न हो।

उप-प्रमेय 2. यदि a, b, c तीन असमतलीय सदिश हो, और यदि c दोनों,

a और b पर सम्य हो तो $c, a \times b$ के समान्तर होगा।

उदाहरण नं० 1.

वह प्रतिबन्ध ज्ञात करो कि सदिश $\mathbf{a} = (a_1\mathbf{i} + a_2\mathbf{j} + a_3\mathbf{k})$

और $\mathbf{b} = (b_1\mathbf{i} + b_2\mathbf{j} + b_3\mathbf{k})$ समान्तर हों।

\mathbf{a} और \mathbf{b} समान्तर होंगे यदि $\mathbf{a} \times \mathbf{b} = 0$.

या $(a_1\mathbf{i} + a_2\mathbf{j} + a_3\mathbf{k}) \times (b_1\mathbf{i} + b_2\mathbf{j} + b_3\mathbf{k}) = 0$.

$$\text{या } \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} = 0.$$

या $(a_2b_3 - a_3b_2)\mathbf{i} + (a_3b_1 - a_1b_3)\mathbf{j} + (a_1b_2 - a_2b_1)\mathbf{k} = 0$.

$\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$ प्रत्येक के गुणांको को शून्य रखने पर

$$\frac{a_2}{b_2} = \frac{a_3}{b_3}, \quad \frac{a_3}{b_3} = \frac{a_1}{b_1}, \quad \frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2}.$$

$$\text{या } \frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2} = \frac{a_3}{b_3}$$

2. उस समान्तर चतुर्भुज का क्षेत्रफल ज्ञात करो जिसकी घासमन भुजाएँ $\mathbf{i} + 2\mathbf{j} + 3\mathbf{k}$ और $(-3\mathbf{i} - 2\mathbf{j} + \mathbf{k})$ हैं।

[इसा० 57, सल० 57, 60]

माना $\mathbf{a} = \mathbf{i} + 2\mathbf{j} + 3\mathbf{k}$, $\mathbf{b} = (-3\mathbf{i} - 2\mathbf{j} + \mathbf{k})$, तो

$$\begin{aligned} \mathbf{a} \times \mathbf{b} &= \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 1 & 2 & 3 \\ -3 & -2 & 1 \end{vmatrix} \\ &= 8\mathbf{i} - 10\mathbf{j} + 4\mathbf{k}. \end{aligned} \quad \dots (1)$$

समान्तर चतुर्भुज का क्षेत्रफल $= |\mathbf{a} \times \mathbf{b}|$.

$$= \sqrt{64 + 100 + 16} = \sqrt{180} \text{ इकाई.}$$

3. वह इकाई-सदिश ज्ञात करो जो सदिशों $2\mathbf{i} - \mathbf{j} + \mathbf{k}$ और $3\mathbf{i} + 4\mathbf{j} - \mathbf{k}$ पर लम्ब हो। इन दोनों सदिशों के बीच के कोण का sine ज्ञात करो

[सल० 60, 62 उत्कल 63, वि० 63.]

माना दो सदिश, $\mathbf{a} = 2\mathbf{i} - \mathbf{j} + \mathbf{k}$, $\mathbf{b} = 3\mathbf{i} + 4\mathbf{j} - \mathbf{k}$ हैं।

$a \times b$ इन दोनों सदिशों पर सम्ब होगा।

$$\text{और } ab \sin \theta \hat{n} = a \times b = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 2 & -1 & 1 \\ 3 & 4 & -1 \end{vmatrix} = -3\hat{i} + 5\hat{j} + 11\hat{k}$$

....(1)

$$\text{सदिश } \hat{n} \text{ की सम्बर्द्ध} = \sqrt{9+25+121} = \sqrt{155}. \text{(2)}$$

$$\therefore \text{इकाई सदिश } \hat{n} = -\frac{3}{\sqrt{155}} \hat{i} + \frac{5}{\sqrt{155}} \hat{j} + \frac{11}{\sqrt{155}} \hat{k}. \text{(3)}$$

माना दोनों सदिशों के बीच का कोण θ है तो

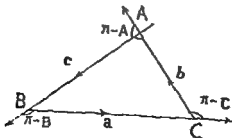
$$\begin{aligned} \sin^2 \theta &= \frac{\sum (a_2 b_3 - a_3 b_2)^2}{\sum a_1^2 \cdot \sum b_1^2} \\ &= \frac{\sqrt{3^2+5^2+11^2}}{\sqrt{4+1+1} \sqrt{9+16+1}} = \frac{\sqrt{155}}{\sqrt{155}}. \text{ उत्तर} \end{aligned}$$

4. सिद्ध करो कि किसी त्रिभुज ABC में

$$\frac{\sin A}{a} = \frac{\sin B}{b} = \frac{\sin C}{c}. \text{ [गुजरात 52, बम्बई 60]}$$

त्रिभुज ABC में माना $\vec{BC}, \vec{CA}, \vec{AB}$ क्रमशः सदिश a, b, c निरूपित करते हैं।

सदिश-योग के नियम से



$$-a = b + c. \quad \dots(1)$$

$$\text{या } a + b + c = 0. \quad \dots(1)$$

(1) से a और b का क्रमिक सदिश-गुणन करने से

$$a \times (a + b + c) = 0.$$

$$\text{या } a \times b = c \times a. \quad \dots(2)$$

$$\text{और } b \times a = c \times b. \quad \dots(3)$$

$$(2) \text{ और } (3) \text{ से } a \times b = b \times c = c \times a. \quad \dots(4)$$

$$\text{या } |a \times b| = |b \times c| = |c \times a|. \quad \dots(5)$$

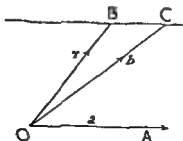
$$ab \sin(\pi - C) = bc \sin(\pi - B) = ca \sin(\pi - A).$$

$$\text{या } ab \sin C = bc \sin B = ca \sin A.$$

$$\text{या } \frac{\sin A}{a} = \frac{\sin B}{b} = \frac{\sin C}{c} \quad \dots(6)$$

5. एक घनचर सदिश \vec{OA} का, निम्न समतल AOB में एक चर सदिश \vec{OB} , से गुणनफल एक घनचर-सदिश है। सिद्ध करो कि B का बिन्दु-पथ एक सरल-रेखा है जोकि \vec{OA} के समांतर है। [लक्षणक 55, पुरक 59]

माना $\vec{OA} = a$, और चर सदिश $\vec{OB} = r$, और $\vec{OC} = c$ एक निम्न सदिश है जो \vec{OA} और \vec{OB} के सदिश-गुणनफल के बराबर है। अर्थात्



$$a \times r = c = (a \times b) \quad \dots (1) \text{ [माना]}$$

क्योंकि कोई भी अक्षर-सदिश दो नियत सदिशों के वज्जीय-गुणनफल से अभिव्यक्त किया जा सकता है।

$$\text{या } a \times r = a \times b.$$

$$\text{या } a \times (r - b) = 0. \quad \dots (2)$$

(2) से स्पष्ट है कि सदिश $(r - b)$, सदिश a के समान्तर है।

$$\text{या } r - b = \lambda a.$$

$$\text{या } r = b + \lambda a. \quad \dots (3)$$

समीकरण (3) एक सरल-रेखा है जोकि सदिश a के समान्तर है और बिन्दु b से होकर जाती है। अतः चर सदिश r का अन्तिम सिरा इस सरल-रेखा पर है, या B का बिन्दु-पथ एक सीधी रेखा है।

6. सिद्ध करो कि d बिन्दु से होकर जाने वाली और a, b, c सदिशों के साथ समान कोण बनाने वाली रेखा का समीकरण

$$r = d + \lambda \{a \times b + b \times c + c \times a\} \text{ है।} \quad [\text{लखनऊ 61}]$$

माना वह रेखा इकाई सदिश \hat{k} के समान्तर है। तो इसका समीकरण

$$r = d + s\hat{k} \text{ है।} \quad \dots (1)$$

माना यह a, b, c के साथ θ कोण बनाती है। और $\hat{a}, \hat{b}, \hat{c}$ क्रमशः a, b, c की दिशा में इकाई सदिश हैं। तो

$$\hat{a} \cdot \hat{k} = \hat{b} \cdot \hat{k} = \hat{c} \cdot \hat{k} = \cos \theta. \quad \dots (2)$$

$$\text{या } \hat{k} \cdot (\hat{a} - \hat{b}) = 0. \quad \dots (3)$$

$$\text{और } \hat{k} \cdot (\hat{b} - \hat{c}) = 0. \quad \dots (4)$$

(3) और (4) से स्पष्ट है कि सदिश $\hat{k}, (\hat{a} - \hat{b})$ और

$(\hat{b} - \hat{c})$ पर लम्ब है। इसलिए \hat{k} , $(\hat{a} - \hat{b}) \times (\hat{b} - \hat{c})$ के समान्तर है।

अतः सरल-रेखा का समीकरण है

$$\begin{aligned} r &= d + s' \{ (\hat{a} - \hat{b}) \times (\hat{b} - \hat{c}) \}. \\ &= d + s' \{ \hat{a} \times \hat{b} + \hat{c} \times \hat{a} + \hat{b} \times \hat{c} \}. \\ &= d + abc s' (ca \times b + bc \times a + ab \times c). \\ &= d + t (ca \times b + bc \times a + ab \times c). \quad \dots (5) \end{aligned}$$

प्रश्नावली 7

1. सिद्ध करो कि $(a - b) \times (a + b) = 2a \times b$. इसकी ज्यामितीय व्याख्या करो।

[संखनक 56, 59, धारा 66, 67]

2. सिद्ध करो कि

$$a \times (b + c) + b \times (c + a) + c \times (a + b) = 0.$$

3. यदि a, b, c किसी त्रिभुज के शीर्ष हैं, तो सिद्ध करो कि त्रिभुज का सदिश-क्षेत्रफल $= \frac{1}{2} (b \times c + c \times a + a \times b)$.

[उत्कल 50, विक्रम 63]

इससे तीन बिन्दुओं के समरेख होने का प्रतिवन्ध प्राप्त करो।

4. यदि बिन्दु A, B, C के किसी मूलबिन्दु के सापेक्ष स्थिति-सदिश a, b, c हों तो सिद्ध करो कि सदिश

$$(a \times b + b \times c + c \times a)$$
 समतल ABC पर लम्ब होगा।

5. उस समानान्तर चतुर्भुज का क्षेत्रफल ज्ञात करो जिसकी दो घासन्न भुजाएँ $i + 2j + 3k$ और $-3i - 2j + k$ हैं।

[संखनक 57, इला० 57]

6. उस समानान्तर चतुर्भुज का क्षेत्रफल ज्ञात करो जिसके विकर्ण $3i + j - 2k$ और $\Delta i - 3j + 4k$ हैं।

7. दो सदिश a और b के बीच के कोण का ज्या (sine) ज्ञात करो,
 $a = 3i + j + 2k$, $b = 2i + 2j + 4k$.

[संलग्नक 60]

8. दो सदिश $a = 3i + 4j$ and $b = -5i + 7j$ द्वारा घेरे गए क्षेत्रफल का मान ज्ञात करो।

9 सिद्ध करो कि एक समतल चतुर्भुज का क्षेत्रफल

$$= \frac{1}{2} \vec{AC} \times \vec{BD}.$$

[सकेत उन दो त्रिभुजों का क्षेत्रफल ज्ञात करो जिनमें विकर्ण \vec{AC} चतुर्भुज को विभाजित करता है]

10. सिद्ध करो कि किसी समतल की एक असमानान्तर भुजा के मध्य-बिन्दु के सम्मुख भुजा के सिरो को मिलाने से जो त्रिभुज बनता है उसका क्षेत्रफल समतल के क्षेत्रफल का आधा होता है।

[प्रागरा 57]

11. सिद्ध करो कि दो सदिशों b और c पर लम्ब-सदिश का समीकरण $r = a + t(b \times c)$ है।

[संलग्नक 56, 57, 59]

12. यदि चतुर्फलक के प्रत्येक समतल के सदिश-क्षेत्र की दिशा, उस पर बाह्य और अभिलम्ब की दिशा है, तो सिद्ध करो कि चारों सदिश-क्षेत्रों का योग शून्य है।

[सकेत बाह्यलम्ब n , का परिमाण $= \frac{1}{2} (a \times b)$, n_2 का $= \frac{1}{2} (b \times c)$]

4.15 यान्त्रिकी में अनुप्रयोग (Applications to mechanics)

लामी का प्रमेय: (Lami's Theorem) यदि एक बिन्दु पर कार्य करने वाले तीन बल संतुलन अवस्था में हों तो प्रत्येक बल दूसरे दो बलों के बीच के कोण के ज्या (sine) के अनुपाती होता है।

माना तीन बल $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \vec{F}_3$ एक बिन्दु पर कार्य कर रहे हैं और वे सन्तुलन-प्रवस्था में हैं।

माना $\hat{a}, \hat{b}, \hat{c}$ बल F_1, F_2, F_3 की दिशाओं में इकाई सदिश हैं।
चूँकि बल सन्तुलन में हैं इसलिए इनका सदिश-योग

$$\vec{F}_1 \hat{a} + \vec{F}_2 \hat{b} + \vec{F}_3 \hat{c} = 0. \quad \dots (1)$$

\hat{a} और \hat{b} से क्रमिक सदिश-गुणा करने पर

$$\vec{F}_2 \hat{a} \times \hat{b} + \vec{F}_3 \hat{a} \times \hat{c} = 0.$$

$$\text{या } \vec{F}_2 \hat{a} \times \hat{b} = \vec{F}_3 \hat{c} \times \hat{a}. \quad \dots (2)$$

$$\text{और } \vec{F}_2 \hat{b} \times \hat{a} + \vec{F}_3 \hat{b} \times \hat{c} = 0.$$

$$\text{या } \vec{F}_1 \hat{a} \times \hat{b} = \vec{F}_3 \hat{b} \times \hat{c} \quad \dots (3)$$

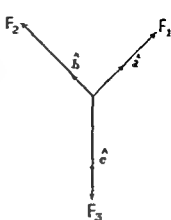
$$(2) \text{ और } (3) \text{ से } \frac{F_1}{|\hat{b} \times \hat{c}|} = \frac{F_2}{|\hat{c} \times \hat{a}|} = \frac{F_3}{|\hat{a} \times \hat{b}|}$$

$$\text{या } \frac{F_1}{\sin \theta_1} = \frac{F_2}{\sin \theta_2} = \frac{F_3}{\sin \theta_3}$$

4.16 बल द्वारा किया गया कार्य। (work done by a Force)

एक बल द्वारा किया गया कार्य एक सदिश राशि है और यह बल तथा बल की दिशा में विस्थापन के घटक के गुणनफल के बराबर होता है।

यदि \vec{F} और d बल-सदिश तथा विस्थापन-सदिश निरूपित करने हैं और इनके बीच का कोण θ है तो



किया गया कार्य $W = Fd \cos \theta = \vec{F} \cdot \vec{d}$ होगा(1)

(1) से स्पष्ट है कि W धन, ऋण, या शून्य होगा यदि θ न्यून, अधिक या तब कोण है।

माना एक कण पर कई बल F_1, F_2, \dots, F_n कार्य कर रहे हैं और विस्थापन-सदिश d है। तो कुल किया गया कार्य

$$W = \vec{F}_1 \cdot \vec{d} + \vec{F}_2 \cdot \vec{d} + \dots + \vec{F}_n \cdot \vec{d} \\ = \left(\sum_1^n \vec{F} \right) \cdot \vec{d}.$$

जोकि परिणामित बल द्वारा किए गए कार्य के बराबर है यतः एक बिन्दु पर कर रहे कई बलों का कार्य = उनके परिणामित बल द्वारा किया गया कार्य।

4.17 बल का घूर्णन या ऐंठन। (Moment or torque of a force)

बल का परिमाण और दिशा होती है और कार्य-दिशा भी। यतः बल एक सरल-रेखा में स्थानीकृत (localized) सदिश-राशि है। एकमात्र सदिश F , केवल बल का परिमाण और दिशा निरूपित करता है। इसलिए इसकी कार्य-दिशा को अभिव्यक्त करने के लिए एक और सदिश की भी आवश्यकता होती है। प्रामः बल का किसी बिन्दु के प्रति घूर्णन को सदिश लिया जाता है।

माना O कोई बिन्दु है और बल \vec{F} की कार्य-दिशा पर किसी बिन्दु P का O के सापेक्ष स्थिति-सदिश \vec{r} है और माना O से

\vec{F} पर लंब OL है।

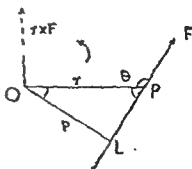
बल \vec{F} का बिन्दु O के प्रति घूर्णन

$$\vec{m} = \vec{r} \times \vec{F}. \quad \dots(1)$$

\vec{m} का परिमाण $= r F$

$$\sin \theta = OL/F = pF.$$

.. (2)



और \vec{m} , r और \vec{F} , या समतल OPF पर लव है और इसके इस और होता है जिससे O बिन्दु को बल बायावर्त-दिशा में घुमावे।

यदि बल \vec{F} और घूर्ण \vec{m} दिया हुआ हो तो बल पूर्णतया-परिमाण, दिशा और कार्य-दिशा में अभिव्यक्त किया हुआ माना जाता है। कार्य-दिशा \vec{m} के लव और O में से होकर जाने वाले समतल पर स्थित होती है। और इसकी O से दूरी $p = m/F$ मूत्र से निकाली जा सकती है। m , सदिश \vec{m} का मापांक है। और इसकी दिशा \vec{F} की दिशा ही होती है परन्तु p , O के उस ओर होगा कि OL से \vec{F} की ओर घूर्णन, \vec{m} की दिशा के सापेक्ष घन होगा।

4.18 किन्हीं बलों का घूर्ण (Moment of a number of forces)

माना बिन्दु P पर n बल $F_1, F_2 \dots F_n$ कार्य कर रहे हैं और उनका परिणामित बल $R = F_1 + F_2 \dots + F_n$ है। और O कोई बिन्दु है।

माना $OP = r$, तो R का O अपेक्षा घूर्णन

$$\vec{m} = OP \times R.$$

$$= OP \times (\vec{F}_1 + \vec{F}_2 \dots + \vec{F}_n)$$

$$= r \times \vec{F}_1 + r \times \vec{F}_2 + \dots = r \times \vec{F}_n.$$

$$= \text{अलग-अलग बलों के घूर्णों का सदिश-योग}$$

अतः यदि कई बल किसी बिन्दु P पर कार्य कर रहे हों और उनकी, उनके परिणामित बल R से बदला जाय तो कुल घूर्ण में कोई परिवर्तन नहीं होता।

4.19 किसी बल का किसी रेखा की अपेक्षा घूर्ण (Moment of a force about a line)

माना सदिश \vec{F} और r के समकोणीय निर्देशांक घटक निम्न हैं

$$\vec{F} = xi + yj + zk.$$

....(1)

$$\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}. \quad \dots(2)$$

$\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$ धक्षों की दिशाओं में इकाई-सदिश है। तो बल F का मूल-

बिन्दु O के सापेक्ष घूर्ण \vec{m} , और

$$\vec{m} = (x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}) \times (x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}).$$

$$= \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ x & y & z \\ X & Y & Z \end{vmatrix}$$

$$\text{या } \vec{m} = (yZ - zY)\mathbf{i} + (zX - xZ)\mathbf{j} + (xY - yX)\mathbf{k}. \quad \dots(3)$$

m का \mathbf{i} की दिशा में घटक

$$= m\mathbf{i} = (yZ - zY)\mathbf{i} \quad \dots(4)$$

स्थितिबिज्ञान (Statics) में हम जानते हैं कि \mathbf{i} का गुणांक, समीकरण (1) में, बल F का x -घक्ष के सापेक्ष घूर्ण है।

[\mathbf{i} , x -घक्ष की दिशा में, इकाई-सदिश है।]

अतः (4) से F का x -घक्ष के सापेक्ष घूर्ण $m\mathbf{i}$ है।

चूँकि O को मूल-बिन्दु मान कर, O में से किसी भी रेखा को x -घक्ष माना जा सकता है। अतः बल F का O में से जाने वाली किसी रेखा के सापेक्ष घूर्ण, F का O के सापेक्ष घूर्ण का रेखा की दिशा में घटक, के समान है।

अतः निर्देशक-घक्षों के सापेक्ष F के घूर्ण क्रमशः

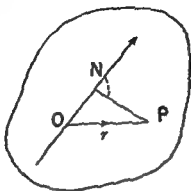
$m.i, m.j$ और $m.k$ हैं।

नोटः—किसी बल का किसी बिन्दु के सापेक्ष घूर्ण एक सदिश-राशि है परन्तु किसी रेखा के सापेक्ष घूर्ण एक अदिश-राशि होती है।

ऊपर के विवरण से हम एक स्थायीकृत सदिश का, किसी बिन्दु के सापेक्ष, घूर्ण की परिभाषा इस प्रकार से भी दे सकते हैं।

परिभाषा—किसी बिन्दु r में से होकर जाने वाली रेखा में स्थायीकृत सदिश v का मूल-बिन्दु के सापेक्ष घूर्ण $r \times v$ है।

4.20 दृढ़ वस्तु का कोणीय-वेग । (Angular Velocity of a Rigid body)



माना एक दृढ़ वस्तु एक स्थिर-अक्ष ON के सापेक्ष घूम रही है और इसका कोणीय-वेग ω है जोकि एक समान है । कोणीय-वेग एकमात्र विधि से सदिश $\vec{\omega}$ द्वारा निरूपित किया जा सकता है । इसका मापक ω है और दिशा अक्ष के समानांतर, घूर्णन के अपेक्षा धन दिशा, की ओर है । अर्थात् उस दिशा में जिस ओर एक दक्षिणावर्तों पैच को वस्तु के घूर्णन की ओर घुमाने से आगे बढ़ता है ।

माना O , अक्ष पर एक स्थिर बिन्दु है, और P वस्तु का एक स्थिर (fixed) बिन्दु है । PN अक्ष पर लम्ब है और $\vec{OP} = \vec{r}$ । बिन्दु P एक ऐसे वृत्त पर घूम रहा है जिसकी त्रिज्या PN है । और $PN = a$ इसका वेग $= PN \times \omega = a.\omega$

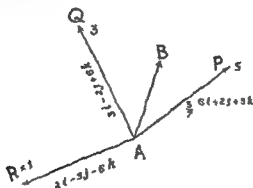
वेग की दिशा PN त्रिज्या और अक्ष, दोनों पर लंब है या सततल ONP पर लंब है । ऐसे वेग को $\vec{\omega} \times \vec{r}$ द्वारा निरूपित किया जाता है ।

उदाहरण. 1.

एक कण पर कार्य कर रहे बलों के परिमाण 5, 3, और 1 पाउंड फीट है और क्रमशः सदिश $(6\mathbf{i} + 2\mathbf{j} + 3\mathbf{k})$, $(3\mathbf{i} - 2\mathbf{j} + 6\mathbf{k})$ और

$(2\mathbf{i} - 3\mathbf{j} - 6\mathbf{k})$ की दिशा में कार्य कर रहे हैं। बल स्थिर है और कण बिन्दु $A(2\mathbf{i} - \mathbf{j} - 3\mathbf{k})$ से $B(5\mathbf{i} - \mathbf{j} + \mathbf{k})$ तक विस्थापित होता है। बलों द्वारा किया गया कार्य ज्ञात करो, जबकि लम्बाई की इकाई फुट है।

माना बल P, Q, R 5, 3 और 1 पौ. भार क्रमशः सदिश $(6\mathbf{i} + 2\mathbf{j} + 3\mathbf{k})$, $(3\mathbf{i} - 2\mathbf{j} + 6\mathbf{k})$ और $(2\mathbf{i} - 3\mathbf{j} - 6\mathbf{k})$ की दिशा में कार्य कर रहे हैं और मूलबिन्दु O है। तो



$$\vec{OP} = (6\mathbf{i} + 2\mathbf{j} + 3\mathbf{k}).$$

$$\begin{aligned} \vec{OP} \text{ की दिशा में इकाई सदिश} \\ = \frac{1}{7}(6\mathbf{i} + 2\mathbf{j} + 3\mathbf{k}). \end{aligned}$$

$$\therefore 5 \text{ पौ. भार का बल } P = \frac{5}{7}(6\mathbf{i} + 2\mathbf{j} + 3\mathbf{k}) \quad \dots (1)$$

$$\text{इसी प्रकार बल } Q = \frac{3}{7}(3\mathbf{i} - 2\mathbf{j} + 6\mathbf{k}). \quad \dots (2)$$

$$\text{और } R = \frac{1}{7}(2\mathbf{i} - 3\mathbf{j} - 6\mathbf{k}). \quad \dots (3)$$

$$\begin{aligned} P, Q, R \text{ का परिणामित बल } \vec{F} &= (1) + (2) + (3). \\ &= \frac{1}{7}(41\mathbf{i} + \mathbf{j} + 27\mathbf{k}). \quad \dots (4) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{विस्थापन-सदिश } \vec{d} &= \vec{AB} = (5\mathbf{i} - \mathbf{j} + \mathbf{k}) - (2\mathbf{i} - \mathbf{j} - 3\mathbf{k}). \\ &= (3\mathbf{i} + 4\mathbf{k}). \quad \dots (5) \end{aligned}$$

$$\text{किया गया कार्य } W = \vec{F} \cdot \vec{d} = \frac{1}{7}(41\mathbf{i} + \mathbf{j} + 27\mathbf{k}) \cdot (3\mathbf{i} + 4\mathbf{k}).$$

$$= \frac{1}{7} (123 + 108) = \frac{231}{7} = 33 \text{ फुट}$$

पॉ. भा:

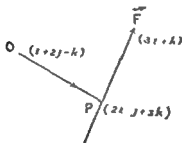
- 2 बिन्दु $(2\mathbf{i} - \mathbf{j} + 2\mathbf{k})$ में से होकर जाने वाले बल $(3\mathbf{i} + \mathbf{k})$ का बिन्दु $(\mathbf{i} + 2\mathbf{j} - \mathbf{k})$ की अपेक्षा ऐंठ (torque) ज्ञात करो।

(राज० 57, पटना 63, आगरा 63)

माना बिन्दु $(\mathbf{i} + 2\mathbf{j} - \mathbf{k})$ और $(2\mathbf{i} - \mathbf{j} + 3\mathbf{k})$ O और P हैं और

बल $(3\mathbf{i} + \mathbf{k})$ को \vec{F} से निर्देशित किया जाता है। तो

F का O की अपेक्षा घूर्ण



$$= \vec{OP} \times \vec{F}$$

$$= \{(2\mathbf{i} - \mathbf{j} + 3\mathbf{k}) - (\mathbf{i} + 2\mathbf{j} - \mathbf{k})\} \times (3\mathbf{i} + \mathbf{k}).$$

$$= (\mathbf{i} - 3\mathbf{j} + 4\mathbf{k}) \times (3\mathbf{i} + \mathbf{k}).$$

$$= \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 1 & -3 & 4 \\ 3 & 0 & 1 \end{vmatrix} = (-3\mathbf{i} + 11\mathbf{j} + 9\mathbf{k}).$$

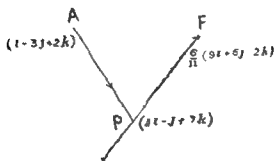
3. 6 इकाई बल बिन्दु P $(4\mathbf{i} - \mathbf{j} + 7\mathbf{k})$ में से सदिश $(9\mathbf{i} + 6\mathbf{j} - 2\mathbf{k})$ की दिशा में कार्य करता है। इसका घूर्ण बिन्दु A $(\mathbf{i} - 2\mathbf{j} + 2\mathbf{k})$ की अपेक्षा ज्ञात करो। और बिन्दु A में से निर्देशांक-अक्षों के समान्तर अक्षों के सापेक्ष घूर्ण भी ज्ञान करो।

बल की दिशा में इकाई सदिश

$$= \frac{1}{11}(9i + 6j - 2k). \quad \dots (1)$$

$$\therefore 6 \text{ इकाई का बल } \frac{6}{11}(9i + 6j - 2k)$$

सदिश द्वारा निरूपित किया जा सकता है।



$$\begin{aligned} \vec{AP} &= (4i - j + 7k) - (i - 3j + 2k) \\ &= (3i + 2j + 5k) \end{aligned} \quad \dots (2)$$

बिन्दु A के सापेक्ष घूर्णन

$$\vec{m} = \vec{AP} \times \vec{F}.$$

$$= (3i + 2j + 5k) \times \frac{6}{11}(9i + 6j - 2k).$$

$$= \frac{6}{11} \begin{vmatrix} i & j & k \\ 3 & 2 & 5 \\ 9 & 6 & -2 \end{vmatrix} = \frac{6}{11}(-34i + 51j).$$

$$= \left(-\frac{204}{11}i + \frac{306}{11}j \right) \quad \dots (3)$$

$$\text{घस्रो के सापेक्ष घूर्णन} = \vec{m} \cdot \vec{i}, \vec{m} \cdot \vec{j}, \vec{m} \cdot \vec{k}.$$

$$= -\frac{204}{11}; \frac{306}{11} \text{ और } 0, \text{ इकाई.}$$

4. एक दृढ़ वस्तु एक स्थिर बिन्दु $(3i - j - 2k)$ के सापेक्ष 5 रेडियन प्रति सेकण्ड के कोणीय-वेग से घूमि (spin) कर रही है। और

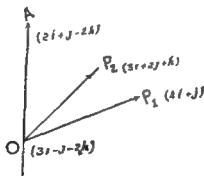
घूर्णन अक्ष सदिश $(2\mathbf{i} + \mathbf{j} - 2\mathbf{k})$ की दिशा में है। सिद्ध करो कि बिन्दु $(4\mathbf{i} + \mathbf{j})$ और $(3\mathbf{i} + 2\mathbf{j} + \mathbf{k})$ पर वेग क्रमशः $5(2\mathbf{i} - 2\mathbf{j} + \mathbf{k})$ और $5(3\mathbf{i} - 2\mathbf{j} + 2\mathbf{k})$ है।

माना स्थिर बिन्दु O, $(3\mathbf{i} - \mathbf{j} - 2\mathbf{k})$ है। और अक्ष OA सदिश $(2\mathbf{i} + \mathbf{j} - 2\mathbf{k})$ की दिशा में है।

\vec{OA} की दिशा में इकाई-सदिश

$$= \frac{1}{3} (2\mathbf{i} + \mathbf{j} - 2\mathbf{k}). \quad \dots (1)$$

$$\text{अतः कोणीय-वेग सदिश} = \frac{5}{3} (2\mathbf{i} + \mathbf{j} - 2\mathbf{k}), \quad \dots (2)$$



$$\begin{aligned} \vec{OP} &= -(3\mathbf{i} - \mathbf{j} - 2\mathbf{k}) + (4\mathbf{i} + \mathbf{j}) \\ &= (\mathbf{i} + 2\mathbf{j} + 2\mathbf{k}), \end{aligned} \quad \dots (3)$$

$$\begin{aligned} \vec{OP}_2 &= (3\mathbf{i} + 2\mathbf{j} + \mathbf{k}) - (3\mathbf{i} - \mathbf{j} - 2\mathbf{k}) \\ &= (3\mathbf{j} + 3\mathbf{k}) \end{aligned} \quad \dots (3)$$

$$P_1 \text{ पर वेग } \vec{V}_1 = \vec{OA} \times \vec{OP}_1 = \frac{5}{3} (2\mathbf{i} + \mathbf{j} - 2\mathbf{k}) \times (\mathbf{i} + 2\mathbf{j} + 2\mathbf{k})$$

$$= \frac{5}{3} \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 2 & 1 & -2 \\ 1 & 2 & 2 \end{vmatrix} = \frac{5}{3} (6\mathbf{i} - 6\mathbf{j} + 3\mathbf{k})$$

$$= 5 (2\mathbf{i} - 2\mathbf{j} + \mathbf{k}) \quad \dots (4)$$

$$\begin{aligned} P_2 \text{ पर वेग} &= \vec{OA} \times \vec{OP}_2 = \frac{1}{5} (2\mathbf{i} + \mathbf{j} - 2\mathbf{k}) \times (3\mathbf{j} + 3\mathbf{k}) \\ &= 5 (3\mathbf{i} - 2\mathbf{j} + 2\mathbf{k}). \quad \dots (5) \end{aligned}$$

प्रश्नावली 8

1. सिद्ध करो कि बिन्दु $(5, 2, 4)$ में से होकर जाने वाले बल $(4, 2, 1)$ का बिन्दु $(3, -1, 3)$ की अपेक्षा घूर्ण $(1, 2, -8)$ है।
2. 5 इकाई बल सदिश $(8\mathbf{i} + 4\mathbf{j} - \mathbf{k})$ की दिशा में कार्य कर रहा है और बिन्दु $(3\mathbf{i} - \mathbf{j} + 6\mathbf{k})$ में से गुजरता है। इसका बिन्दु $O (1 + 2\mathbf{j} - 3\mathbf{k})$ के सापेक्ष घूर्ण ज्ञात करो। और O में से निर्देशांक-अक्षों के समान्तर अक्षों के सापेक्ष भी घूर्ण ज्ञात करो।
3. एक दृढ़ वस्तु 4 रेडियन प्रति सेकण्ड के कोणीय-वेग से, बिन्दु $(1, 3, -1)$ में से गुजरने वाले सदिश $(0, 3, -1)$ की दिशा में, घट्ट के सापेक्ष भ्रमि (spin) करती है। बिन्दु $(4, -2, 1)$ पर इसका वेग ज्ञात करो।

[भागरा, 62]

4. एक कण का कोणीय-वेग 3 रेडियन प्र० से० है। और घूर्णन-अक्ष बिन्दुओं $(1, 1, 2)$ और $(1, 2, -2)$ में से गुजरता है। तो बिन्दु $(3, 6, -4)$ पर वेग ज्ञात करो।

[पंजाब, 59]

5. एक दृढ़ वस्तु एक स्थिर बिन्दु $(3, -2, -1)$ के सापेक्ष 4 रेडियन प्र० से० के कोणीय-वेग से भ्रमि कर रही है। घूर्णन-अक्ष की दिशा $(1, 2, -2)$ है। तो सिद्ध करो कि बिन्दु $(4, 1, 1)$ पर वेग $\frac{4}{5} (10, -4, 1)$ है।

6. एक 15 इकाई बल, सदिश $(i - 2j + 3k)$ की दिशा में कार्य कर रहा है और बिन्दु $(2i - 2j + 2k)$ में से गुजरता है। तो इसका बिन्दु $(i + j + k)$ के सापेक्ष घूर्णन ज्ञात करो।
7. एक कण पर बल $(4i + j - 3k)$ और $(3i + j - k)$ कार्य कर रहे हैं और इसको, बिन्दु $(i + 2j + 3k)$ से $(5i + 4j + k)$ तक, विस्थापित करते हैं। कुल किया गया कार्य ज्ञात करो।

[संस्करण 60, बिहार 60, कसकत्ता 62, प्रागरा 67]

तीन और चार सदिशों का गुणनफल

5.1 परिचय गुणन गुणनफल (multiple products)

पिछले अध्याय में हम देय चुके हैं कि दो सदिशों को हम दो प्रकार से सम्बन्धित कर सकते हैं (1) अदिश-गुणनफल $a \cdot b$, जिससे अदिश-राशि प्राप्त होती है और (2) सदिश-गुणनफल $a \times b$, जिससे हमें एक सदिश-राशि मिलती है। हम $b \times c$ के साथ एक तीसरे सदिश a का बिन्दु-गुणनफल और सदिश-गुणनफल भी प्राप्त कर सकते हैं। गुणन $a \times (b \times c)$ या $a \cdot (b \times c)$ से कोई अर्थ नहीं निकलता क्योंकि $(b \times c)$ तो एक अदिश-राशि है। और $a \cdot (b \times c)$ तो $(b \times c) \cdot a$ है। अर्थात् a की दिशा में सदिश जिसका माप $abc \cos \theta$ है (θ , b और c के बीच का कोण है)

5.2 त्रिक अदिश-गुणनफल (Scalar-triple-product.)

यदि a , b और c तीन सदिश हैं तो a का, b और c के सदिश-गुणनफल से, अदिश-गुणन करने से एक अदिश-राशि प्राप्त होती है जिसको सदिशों a , b , c का त्रिक-अदिश-गुणनफल कहते हैं। इसको $a \cdot (b \times c)$ या $[abc]$ या $[a, b, c]$ लिखा जाता है। इसको मिश्रित-गुणनफल (mixed) भी कहते हैं क्योंकि इसमें बिन्दु और बज्ज दोनों ही होते हैं।

ज्यामितीय व्याख्या : (geometrical interpretation)

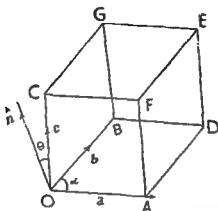
माना a और b के बीच का कोण α है और $a \times b$ और c के बीच θ है।

$$\text{और } a \times b = ab \sin \alpha \hat{n}, \quad \dots (1)$$

\hat{n} इकाई सदिश b और a के समतल पर लंब की दिशा में है।

और, \hat{n} और c के बीच का कोण θ है। अब

$$\begin{aligned} \mathbf{c} \cdot \mathbf{a} \times \mathbf{b} &= n (ab \sin \alpha \hat{n}) \\ &= abc \sin \alpha \cos \theta. \end{aligned} \quad \dots(2)$$



अब एक ऐसा समान्तरफलक (parallelepiped) खींचो जिसके तीन सगामी किनारे OA, OB, OC की लम्बाईयें और दिशा क्रमशः a, b, c की हों। समान्तर चतुर्भुज OADB का सदिश क्षेत्रफल $|\mathbf{a} \times \mathbf{b}|$ है। और इसकी दिशा \hat{n} की दिशा है जोकि OADB पर लम्ब है।

अब $\mathbf{c} \cdot (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) = c \cdot (ab \sin \alpha \hat{n}) = (\text{क्षेत्र OADB}) \cdot OC \cos \theta = \pm V$ समान्तरफलक का आयतन है। ... (3)

यदि θ शून्य है तो त्रिक-गुणनफल धन होगा। यद्यपि a, b, c एक दक्षिणावर्ती सदिशों की पद्धति बनाते हैं।

$$\therefore \mathbf{a} \cdot \mathbf{c} = \mathbf{c} \cdot \mathbf{a}$$

$$\therefore (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot \mathbf{c} = \mathbf{c} \cdot (\mathbf{a} \times \mathbf{b}).$$

$$\text{या } [\mathbf{abc}] = [\mathbf{cab}]. \quad \dots (4)$$

$$\text{पुनः } \mathbf{a} \times \mathbf{b} = -(\mathbf{b} \times \mathbf{a})$$

$$\text{तो } (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot \mathbf{c} = -(\mathbf{b} \times \mathbf{a}) \cdot \mathbf{c}.$$

$$\text{या } [\mathbf{abc}] = -[\mathbf{bac}]. \quad \dots(5)$$

इसी प्रकार $c \cdot (a \times b) = -c \cdot (b \times a)$.

$$\text{या } [cab] = -[cba]. \quad \dots(6)$$

$$\text{इसी प्रकार } b \cdot (c \times a) = (b \times c) \cdot a. \quad \dots(7)$$

अतः

$$\begin{aligned} V &= [abc] = [bca] = [cab] \\ &= -[acb] = -[cba] = -[bac]. \end{aligned} \quad \dots(8)$$

(8) में दक्षिण-पक्ष में हम देखते हैं कि यदि a, b, c के चक्रीय क्रम को बदल दें तो गुणनफल ऋण हो जाता है। इससे हम यह परिणाम निकाल सकते हैं कि त्रिक-अदिश-गुणनफल का मान उसके खण्डों के क्रम पर ही निर्भर करता है और बिन्दु तथा वृत्त की स्थिति में स्वाधीन है। अतः बिन्दु और वृत्त बदल-बदल करने से गुणनफल के मान में कोई अन्तर नहीं पड़ता।

5.3 अदिश-त्रिक-गुणनफल को घटकों में अभिव्यक्त करना।

Scalar-triple-product in terms of components.)

माना i, j, k तीन इकाई सदिश हैं जो परस्पर लम्ब हैं। और a, b, c तीन सदिश हैं कि

$$a = a_1 i + a_2 j + a_3 k,$$

$$b = b_1 i + b_2 j + b_3 k,$$

$$c = c_1 i + c_2 j + c_3 k.$$

$$\text{यदि } a \times b = (a_2 b_3 - a_3 b_2) i + (a_3 b_1 - a_1 b_3) j + (a_1 b_2 - a_2 b_1) k \quad \dots (1)$$

दोनों ओर c से अदिश-गुणा करने से

$$(a \times b) \cdot c = \{(a_2 b_3 - a_3 b_2) i + (a_3 b_1 - a_1 b_3) j + (a_1 b_2 - a_2 b_1) k\} \cdot$$

$$(c_1 i + c_2 j + c_3 k).$$

$$= c_1(a_2 b_3 - a_3 b_2) + c_2(a_3 b_1 - a_1 b_3) + c_3(a_1 b_2 - a_2 b_1).$$

$$= \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} \quad \dots(2)$$

जोकि समानान्तरफलक का मापन है जिसका एक चोना मूल-विन्दु है।

उप-प्रमेय-1. यदि दो सदिश समान या समानान्तर हो, जैसे $b = k c$ तो ऊपर (2) में दो पंक्तियाँ (दूसरी और तीसरी) सर्वसम होंगी और सारणिक का मान शून्य होगा।

[राज० 1972]

$$\therefore [a a b] = [a b b] = [c b c] = 0. \quad \dots (3)$$

अतः यदि दो सदिश समान या समानान्तर हो तो उनका सदिश-त्रिक-गुणनफल शून्य होगा।

उप-प्रमेय-2. विशेष स्थिति में $[i j k] = 1$. .. (4)

क्योंकि ऊपर (2) में विकर्णों को छोड़ जेथ सब प्रत्यक्ष शून्य हैं।

उप-प्रमेय-3. सदिश-त्रिक-गुणनफल $[abc]$ को तीन ध्रुवमतीय सदिशों i, m, n के पदों में अभिव्यक्त करना।

माना तीन सदिश a, b, c ऐसे हैं कि

$$a = a_1 i + a_2 m + a_3 n,$$

$$b = b_1 i + b_2 m + b_3 n,$$

$$c = c_1 i + c_2 m + c_3 n$$

$$\text{तो } (b \times c) = (b_2 c_3 - c_2 b_3) m \times n + (b_3 c_1 - c_3 b_1) n \times i + (b_1 c_2 - c_1 b_2) b \times m \quad \dots (1)$$

$$a (b \times c) = a_1 (b_2 c_3 - c_2 b_3) i m \times n + a_2 (b_3 c_1 - c_3 b_1) m. n \times i + a_3 (b_1 c_2 - c_1 b_2) n i \times m.$$

$$= \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} [i m n]. \quad \dots (2)$$

क्योंकि $[n i i] = [m n n] = [m m i]$, इत्यादि शून्य है और $[i m n] = [m n i] = [n i m]$.

उप-प्रमेय-4. हम निम्नलिखित ध्व्याय में सिद्ध कर चुके हैं कि सदिश-गुणनफल और सदिश-गुणनफल दोनों वटन-नियम का पालन करते हैं। अतः

$$\begin{aligned} (a, b+d, c+e) &= a. (b+d) \times (c+e) \\ &= a [(b \times c) + (b \times e) + (d \times c) + (d \times e)]. \\ &= [abc] + [abe] + [adc] + [ade]. \end{aligned}$$

प्रत्येक पद में चक्रीय क्रम को बनाए रखा है।

5.4 प्रतिबन्ध कि तीन सदिश समतलीय हों (Condition that three vectors are Coplanar)

अनुच्छेद 5.2 से स्पष्ट है कि यदि तीन सदिश \mathbf{a} , \mathbf{b} , \mathbf{c} समतलीय है

तो \vec{OA} , \vec{OB} , \vec{OC} के एक ही तल में होने से समानान्तरफलक का मापतन शून्य हो जाता है। विलोमतः यदि $\mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = 0$ तो सदिश समतलीय होंगे। क्योंकि $\mathbf{b} \times \mathbf{c}$, दोनों सदिशों \mathbf{b} और \mathbf{c} , के समतल पर लम्ब है। और यदि $\mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = 0$, तो इसका अर्थ यह हुआ कि $\mathbf{b} \times \mathbf{c}$ सदिश \mathbf{a} पर भी लम्ब है। इसलिए $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ समतलीय हैं।

अतः सदिश-त्रिक-गुणनफल $[\mathbf{a} \ \mathbf{b} \ \mathbf{c}]$ शून्य होगा यदि और केवल यदि (iii) तीनों सदिश समतलीय हैं।

5.5 सदिश-त्रिक-गुणनफल। (Vector-triple-product)

अब हम \mathbf{a} और $(\mathbf{b} \times \mathbf{c})$ के वज्र-गुणनफल पर विचार करते हैं।

$$\text{माना } \vec{P} = \mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c}). \quad \dots(1)$$

यह एक सदिश है क्योंकि यह \mathbf{a} और $(\mathbf{b} \times \mathbf{c})$, दो सदिशों का सदिश-गुणनफल है। \vec{P} , \mathbf{a} और $(\mathbf{b} \times \mathbf{c})$ दोनों पर लम्ब है। परन्तु $(\mathbf{b} \times \mathbf{c})$ भी \mathbf{b} और \mathbf{c} दोनों पर लम्ब है। इसलिए \vec{P} सदिश \mathbf{b} और \mathbf{c} के समतल में स्थित है और \mathbf{a} इस पर लम्ब है।

अतः हम \vec{P} को \mathbf{b} और \mathbf{c} के पदों में अभिव्यक्त कर सकते हैं।

$$\text{माना } \vec{P} = \mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = l\mathbf{b} + m\mathbf{c} \quad \dots(2)$$

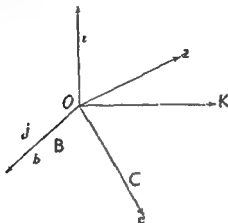
(l और m सदिश हैं)

अब l और m का मान ज्ञात करने के लिए एक, तीन इकाई सदिश \mathbf{i} , \mathbf{j} , \mathbf{k} , जो परस्पर लम्ब हों, उनकी दक्षिणावर्ती पद्धति का विचार करो। और ऐसे समझित करो कि \mathbf{j} , \mathbf{b} के समानान्तर हो। \mathbf{k} इस पर लम्ब हो तथा

॥ घोर c के समतल में स्थित हो। तब हम सदिश a, b, c को निम्न प्रकार से लिख सकते हैं।

$$b = b_j \quad \dots (2)$$

$$c = c_1 i + c_2 j + c_3 k \quad \dots (3)$$



$$\text{घोर } a = a_1 i + a_2 j + a_3 k. \quad \dots (4)$$

(2) घोर (3) से

$$\begin{aligned} b \times c &= b_j \times (c_2 j + c_3 k) \\ &= b c_3 i \end{aligned} \quad \dots (5)$$

$$\begin{aligned} \therefore a \times (b \times c) &= (a_1 i + a_2 j + a_3 k) \times b c_3 i \\ &= a_2 c_3 b j - a_3 b c_3 k. \end{aligned} \quad \dots (6)$$

$a_2 c_3 b j$ को जोड़ने और घटाने से

$$\begin{aligned} a \times (b \times c) &= (a_2 c_3 + a_3 c_3) b j - a_2 b (c_2 j + c_3 k) \\ &= (a c) b - (a b) c. \end{aligned} \quad \dots (7)$$

$$= \begin{vmatrix} i & j & k \\ a & b & c \end{vmatrix}$$

इसी प्रकार

$$\begin{aligned} (b \times c) \times a &= -a \times (b \times c) \\ &= (a b) c - (a c) b \end{aligned} \quad \dots (8)$$

नोट:—सदिश-त्रिक-गुणनफल में कोष्ठक (bracket) के स्थान को बदल नहीं सकते। चूँकि $a \times (b \times c)$ एक सदिश है जो b और c सदिशों में अभिव्यक्त किया जा सकता है। और $(a \times b) \times c$ सदिश a और b सदिशों में अभिव्यक्त किया जा सकता है। अतः यह दोनों गुणनफल सामान्य रूप में भिन्न सदिश ही निरूपित करते हैं।

यदि b और c समानान्तर हैं तो $b \times c = 0$ तो त्रिक-गुणनफल भी शून्य होगा।

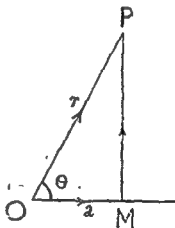
सदिश-त्रिक-गुणनफल का परिणाम निम्न विधि से पाद किया जा सकता है।

सदिश-त्रिक-गुणनफल = (बाह्य दूरस्थ) निकटवर्ती — (बाह्य निकटवर्ती) दूरस्थ।

5.6 सदिश के घटक (Resolute of a vector,)

माना सदिश $\vec{OP} = r$ का, a और r के समतल में दो लम्ब घटकों में विघटन करना है। एक तो a के समान्तर, दूसरा इसके लम्बवत।

यदि a और r के बीच का कोण θ है। और \hat{a} , a की दिशा में इकाई-सदिश है तो \hat{a} का a की दिशा में घटक =



$$\vec{OM} = r \cos \theta \hat{a} = \frac{r \cos \theta}{a^2} a = \frac{a \cdot r}{|a|^2} a \quad \dots (1)$$

[r , सदिश r का मापांक है।]

$$a \text{ की दिशा के लम्ब, घटक} = \vec{MP} = r - \vec{OM} = r - \frac{a \cdot r}{a^2} a.$$

$$= \frac{(a \cdot a)r - (a \cdot r)a}{a^2} = \frac{a \times (r \times a)}{a^2} \quad \dots (2)$$

उदाहरण 1.

सदिश-त्रिक-गुणनफल के सूत्र $a \times (b \times c) = (a \cdot c)b - (a \cdot b)c$ का सत्यापन करो जबकि

$$a = (i - 2j + 3k), b = (2i + j - k), c = (j + k)$$

$$\text{प्रथम } b \times c = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 2 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 2i - 2j + 2k. \quad \dots(1)$$

$$\begin{aligned} a \times (b \times c) &= (i - 2j + 3k) \times (2i - 2j + 2k) \\ &= -2i \times j + 2i \times k - 4j \times i - 4j \times k + 6k \times i \\ &\quad - 6k \times j. \\ &= (2i + 4j + 2k). \quad \dots(2) \end{aligned}$$

$$a \cdot c = -2 + 3 = 1.$$

$$\therefore (a \cdot c)b = 2i + j - k. \quad \dots(3)$$

$$a \cdot b = (2 - 2 - 3) = -3.$$

$$\therefore (a \cdot b)c = -3j - 3k. \quad \dots(4)$$

$$(3) - (4) = (a \cdot c)b - (a \cdot b)c = (2i + 4j + 2k) = a \times (b \times c).$$

(2) से

2. सिद्ध करो कि चार बिन्दु

$4i + 5j - k$, $-j - k$, $3i + 9j + 4k$ और $-4i + 4j + 4k$ समतलीय हैं।

[संलग्नक 50, बनारस 50, बड़ोदा 63]

माना बिन्दु O के सापेक्ष चार बिन्दु A, B, C, D दिए हुए सरिणों से अभिव्यक्त किए गए हैं अर्थात्

$$\vec{OA} = 4i + 5j + k.$$

$$\vec{OB} = -j - k.$$

$$\vec{OC} = 3i + 9j + 4k.$$

$$\vec{OD} = -4\mathbf{i} + 4\mathbf{j} + 4\mathbf{k}.$$

$$\text{तो } \vec{AB} = \vec{OB} - \vec{OA} = -4\mathbf{i} - 6\mathbf{j} - 2\mathbf{k} = \vec{p}. \quad \dots(1)$$

$$\vec{BC} = \vec{OC} - \vec{OB} = 3\mathbf{i} + 10\mathbf{j} + 5\mathbf{k} = \vec{q}. \quad \dots(2)$$

$$\vec{CD} = \vec{OD} - \vec{OC} = -7\mathbf{i} - 5\mathbf{j} = \vec{r}. \quad \dots(3)$$

$\vec{p}, \vec{q}, \vec{r}$ समतलीय होंगे यदि इनका अदिश-त्रिक-गुणनफल शून्य है।

$$\text{अब } \begin{vmatrix} \vec{p} & \vec{q} & \vec{r} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -4 & -6 & -2 \\ 3 & 10 & 5 \\ -7 & -5 & 0 \end{vmatrix} = -4(25) - 3(-10) - 7(-10).$$

$= 0$. अतः $\vec{AB}, \vec{BC}, \vec{CD}$ समतलीय हैं। या बिन्दु A, B, C, D एक ही समतल पर स्थित हैं।

3. सिद्ध करो कि $[lmn][abc] = \begin{vmatrix} l.a & l.b & l.c \\ m.a & m.b & m.c \\ n.a & n.b & n.c \end{vmatrix}$
और इसका कार्तीय (Cartesian) तुल्य ज्ञात करो।

[पंजाब 60, आगरा 56, 65, बनारस 52, लखनऊ 52, 56, पटना 54]

$$\text{माना } \mathbf{a} = a_1\mathbf{i} + a_2\mathbf{j} + a_3\mathbf{k},$$

$$\mathbf{b} = b_1\mathbf{i} + b_2\mathbf{j} + b_3\mathbf{k},$$

$$\mathbf{c} = c_1\mathbf{i} + c_2\mathbf{j} + c_3\mathbf{k},$$

$$\text{और } \mathbf{l} = l_1\mathbf{i} + l_2\mathbf{j} + l_3\mathbf{k},$$

$$\mathbf{m} = m_1\mathbf{i} + m_2\mathbf{j} + m_3\mathbf{k},$$

$$\mathbf{n} = n_1\mathbf{i} + n_2\mathbf{j} + n_3\mathbf{k}.$$

$$[lmn][abc] = \begin{vmatrix} l_1 & l_2 & l_3 \\ m_1 & m_2 & m_3 \\ n_1 & n_2 & n_3 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} \quad (1)$$

दक्षिण-पक्ष में दो सारणिकों का गुणन एक 3-श्रेणी का सारणिक है जिसके अवयव $l.a, l.b$ इत्यादि हैं। अतः

$$[lmn] [abc] = \begin{vmatrix} l.a & l.b & l.c \\ m.a & m.b & m.c \\ n.a & n.b & n.c \end{vmatrix}.$$

(1) का कार्तीय तुल्य, दो सार्वत्रिकों के गुणन का नियम है।

प्रश्नावली 9

- सिद्ध करो कि $a \times (r \times s) = (a \times r) \times s$, और
 (i) $a \times (b \times c) + b \times (c \times a) + c \times (a \times b) = 0$.
 (ii) $a \times (b + c) + b \times (c + a) + c \times (a + b) = 0$.
 [पंजाब 60, भागरा 53, 65, 67, विक्रम 63, नागपुर 63, दिल्ली 63]
- सिद्ध करो कि
 $(a + b) \cdot [(b + c) \times (c + a)] = 2[abc]$.
 (Cal 51, 61)
- सदिश-त्रिक-गुणनफल के सूत्र
 $a \times (b \times c) = (a \cdot c) b - (a \cdot b) c$ का सत्यापन करो जबकि
 $a = i - 2j + k$, $b = 2i + j + k$, $c = i + 2j - k$.
- सदिश-त्रिक-गुणनफल ज्ञात करो
 $[(2, -3, 1), (1, -1, 2), (2, 1, 1)]$.
- सिद्ध करो कि बिन्दु A (4, 5, 1), B (0, -1, -1), C (3, 9, 4)
 और D (-4, 4, 4) समतलीय हैं।
- p का मान ज्ञात करो कि बिन्दु (3, 2, 1), (4, p , 5),
 (4, 2, -2) और (b, 5, -1) समतलीय हों।
- सिद्ध करो कि $a \times (b \times c) = (a \times b) \times c$ (iff) यदि और केवल
 यदि $(a \times c) \times b = 0$ या यदि a और c समरेख-सदिश हैं।
 [दिल्ली 58, कर्नाटक 63]

8. यदि $a + b + c = 0$ तो सिद्ध करो कि

$$a \times b = b \times c = c \times a.$$

[ए. एम. आर्. ६ 60]

9. सिद्ध करो कि

$$(a - d) \cdot (b - c) + (b - d) \cdot (c - a) + (c - d) \cdot (a - b) = 0.$$

10. यदि a, b, c तीन इकाई सदिश हों और $a \times (b \times c) = \frac{1}{2}b$ तो a, b और c के साथ जो कोण बनाता है वे ज्ञात करो। (b और c असमान्तर हैं)।

[राज० 1971, नागपुर 63.]

11. उस समान्तरकणक (parallelepiped) का आयतन ज्ञात करो जिसके बिन्दु a, b, c सदिशों द्वारा अभिव्यक्त किए गए हैं और

$$a = (2i - 3j + 4k), b = (i + 2j - k), c = (3i - j + 2k)$$

[बर्नाटक 63]

12. यदि a, b, c मूल-बिन्दु से, बिन्दु A, B, C तक तीन सदिश हैं तो सिद्ध करो कि

$$a \times b + b \times c + c \times a$$
 समतल ABC पर लम्ब है।

13. यदि l, m, n तीन अगमनशील-सदिश हों तो

$$\{l \ m \ n\} (a \times b) = \begin{vmatrix} l.a & l.b & l \\ m.a & m.b & m \\ n.a & n.b & n \end{vmatrix} \quad (\text{आगरा 49, नागपुर 62})$$

14. निम्न सर्वसमिका (identity) की स्थापना करो

$$2a = i \times (a \times i) + j \times (a \times j) + k \times (a \times k).$$

जहाँ i, j, k लम्बप्रसामान्यक त्रयी है। (Orthonormal triads). हैं।

15. सिद्ध करो कि

$$(a \ b \ c)^2 = \begin{vmatrix} a.a & a.b & a.c \\ b.a & b.b & b.c \\ c.a & c.b & c.c \end{vmatrix}.$$

16 गुणनफल का मान ज्ञात करो

$$\{(i + 2j - k) \times (3i + 2j - 4k)\} \times (2i - j + 3k).$$

5.7 चार सदिशों का अदिश-गुणनफल
(Scalar-product of four vectors)

चार सदिश a, b, c, d दिए हुए हों तो गुणनफल $(a \times b) \cdot (c \times d)$ या $(a \times c) \cdot (b \times d)$ इत्यादि चार सदिशों का अदिश-गुणनफल कहलाता है। यह एक अदिश या अदिश-राशि होती है। चूँकि अदिश-निक-गुणनफल में हम बिन्दु और वektor को घात में बदल सकते हैं अतः हम ऊपर के गुणनफल को भी निम्न प्रकार से लिख सकते हैं।

$$\begin{aligned}(a \times b) \cdot (c \times d) &= a \cdot b \times (c \times d) \\ &= a \cdot [(b \cdot d) c - (b \cdot c) d] \\ &= (b \cdot d) (a \cdot c) - (b \cdot c) (a \cdot d). \quad \dots (1)\end{aligned}$$

इसको सारणीक के रूप में भी इस प्रकार से लिख सकते हैं—

$$(a \times b) \cdot (c \times d) = \begin{vmatrix} a \cdot c & a \cdot d \\ b \cdot c & b \cdot d \end{vmatrix}. \quad (2)$$

समीकरण (2) लैग्रान्ज-सर्वसमिका (Lagrange's identity) कहलाती है।

विशेष स्थिति में यदि $c = a$, और $b = d$ तो

$$\begin{aligned}(a \times b) \cdot (a \times b) &= a^2 b^2 - (a \cdot b)^2 \\ &= a^2 b^2 - a^2 b^2 \cos^2 \theta = a^2 b^2 \sin^2 \theta \dots (3)\end{aligned}$$

5.8 चार सदिशों का अदिश-गुणनफल (Vector product of four vectors)

हम अब चार सदिशों के अदिश-गुणनफल $(a \times b) \times (c \times d)$ पर विचार करते हैं। यह सदिश $a \times b$ पर सम्बन्धित है इसलिए a और b के समतल में स्थित है। अतः इसको a और b के पदों में अभिव्यक्त कर सकते हैं। इसी प्रकार चूँकि यह c और d के समतल में भी स्थित है इसको c और d के पदों में भी अभिव्यक्त कर सकते हैं। अतः यह समतल a, b और c, d के समतल की प्रतिच्छेद-रेखा के समान्तर है।

इसको a और b में अभिव्यक्त करने के लिए हम इसको $a \times b$ के

अदिश-निक-गुणनफल मान लेते हैं जबकि $m = c \times d$

$$\begin{aligned}
 \text{यदि } (a \times b) \times \vec{m} &= (a, \vec{m})b \times (b, \vec{m}) a. \\
 &= [a, (c \times d)]b - [b (c \times d)] a. \\
 &= [a \ c \ d]b - [b \ c \ d] a \quad \dots (1)
 \end{aligned}$$

[राज० 61 कल० 62]

इसको सदिस c और d से भी अभिव्यक्त किया जा सकता है। क्योंकि

$$\text{माना } \vec{n} = a \times b$$

$$\begin{aligned}
 \therefore (a \times b) \times (c \times d) &= \vec{n} \times (c \times d) \\
 &= (\vec{n} d)c - (\vec{n} c)d \\
 &= [a \ b \ d]c - [a \ b \ c]d. \quad \dots (2)
 \end{aligned}$$

[बहोदा 60, राज० 61]

उपक्रम 1 (1) और (2) को समान करने पर हमें a, b, c, d से एकघात सम्बन्ध प्राप्त होता है।

$$- [bcd]a + [acd] b = [abd] c - [abc] d$$

$$\text{या } [bcd] a - [acd] b + [abd] c - [abc] d = 0 \quad (3)$$

यदि (3) में d के स्थान पर r लिखें तो

$$r = \frac{[rbc]a + [rca]b + [rab]c}{[abc]} \quad \dots (4)$$

$$\text{परन्तु } [abc] \neq 0.$$

[भाग 60]

उपक्रम 2. सम्बन्ध (4) के लिए दूसरी विधि भी है।

यदि a, b, c सदिस असमतलीय हो, अर्थात् $[abc] \neq 0$. तो हम r वा a, b, c की दिशाओं में विघटन कर सकते हैं।

$$\text{माना } r = xa + yb + zc. \quad \dots (5)$$

दोनों ओर $(b \times c)$ में घटित-गुणा करने पर

$$[rbc] = x[abc]. \quad [\because [bbc] = [bcc] = 0.]$$

$$\therefore r = \frac{[rbc]}{[abc]}$$

इसी प्रकार से $(c \times a)$ और $(a \times b)$ से क्रम से अदिश-गुणा करने से हमें प्राप्त है

$$s = \frac{[rca]}{[abc]}, \text{ और}$$

$$t = \frac{[rab]}{[abc]}$$

$$\therefore r = \frac{[rbc]a + [rca]b + [rab]c}{[abc]} \quad \dots(6)$$

5.9 व्युत्क्रम-सदिशों की पद्धति (Reciprocal system of vectors)

यदि सदिश a, b, c की परिभाषा निम्न प्रकार से करें कि

$$a' = \frac{b \times c}{[abc]}, \quad b' = \frac{c \times a}{[abc]}, \quad c' = \frac{a \times b}{[abc]}, \quad \dots(1)$$

जबकि a, b, c तीन असमवर्तीय-सदिश हैं; अर्थात् $[abc] \neq 0$.

a', b', c' का क्रमशः a, b, c से अदिश-गुणा करो; तो

$$a \cdot a' = b \cdot b' = c \cdot c' = 1, \quad \dots(2)$$

या हम निम्न सकते हैं कि

$$a' = a^{-1}, \quad b' = b^{-1}, \quad c' = c^{-1} \quad \dots (2)$$

सम्वन्ध (2) के कारण दोनों पद्धतियाँ a, b, c और a', b', c' एक दूसरे का व्युत्क्रम कहलाती हैं।

लवप्रसामान्यक सदिश-त्रयी (orthonormal vector triads) i, j और k एक स्व-व्युत्क्रम पद्धति बनाते हैं।

a, b, c का a', b', c' में मान निकालने के लिए हमें प्राप्त है

$$\begin{aligned} b' \times c' &= \frac{(c \times a) \times (a \times b)}{[abc]^2} = \frac{(cab)a - (aab)c}{[abc]^2} \\ &= \frac{a}{[abc]} \end{aligned} \quad \dots(3)$$

$$\text{इसी प्रकार } c' \times a' = \frac{b}{[abc]}, \text{ और } (a' \times b') = \frac{c}{[abc]}. \quad \dots(4)$$

(3) में दोनों ओर a' का अदिश-गुणा करने पर

$$a' \cdot (b' \times c') = \frac{a \cdot a'}{[abc]} = \frac{1}{[abc]}.$$

$$\text{या } [a' b' c'] [abc] = 1. \quad \dots(5)$$

[भाग 50 57, राज० 59, 62]

$$\text{और } \frac{b' \times c'}{[a' b' c']} = a \quad \dots(6)$$

$$\text{इसी प्रकार } \frac{c' \times a'}{[a' b' c']} = b, \text{ और } \frac{a' \times b'}{[a' b' c']} = c. \quad (7)$$

(1), (6) और (7) से स्पष्ट है कि a, b, c और a', b', c' एक-दूसरे के व्युत्क्रम पड़तियाँ हैं। और (5) से हम देखते हैं कि $[abc]$ और $[a' b' c']$ एक-दूसरे के व्युत्क्रम हैं। और दोनों के चिह्न भी एक ही हैं।

इन दोनों पड़तियों में एक विशेषता यह है कि यदि प्रथम पड़ति के किसी एक सदिश वा दूसरी पड़ति के किसी सदिश में अदिश-गुणा करें तो गुणनफल शून्य होगा। उदाहरण के लिए—

$$a b' = \frac{a \cdot (c \times a)}{[abc]} = \frac{[aca]}{[abc]} = 0. \quad \dots(8)$$

उपप्रेम 1. अनुच्छेद 5.7 से समीकरण (4) को हम a', b', c' के पदों में भी लिख सकते हैं।

$$r = \frac{[rbc]}{[abc]} a + \frac{[rca]}{[abc]} b + \frac{[rab]}{[abc]} c$$

$$\text{या } r = (r \cdot a') a + (r \cdot b') b + (r \cdot c') c \quad \dots(9)$$

इसी प्रकार समिति से

$$r = (r \cdot a) a' + (r \cdot b) b' + (r \cdot c) c' \quad \dots(10)$$

i, j, k की पड़ति स्व-व्युत्क्रम होने के कारण

$$r = (r \cdot i) i + (r \cdot j) j + (r \cdot k) k \quad \dots(11)$$

5.10 दो उपयोगी विघटन । (Two useful decompositions)

(1) यदि a, b, c असमतलीय-सदिश हों तो सिद्ध करो कि

$$b \times c, c \times a, a \times b$$

भी असमतलीय हैं/और a, b, c को [सूत्रनक 60]

$b \times c, c \times a, a \times b$ में अभिव्यक्त करो । [सूत्रनक 57]

चूँकि a, b, c असमतलीय हैं

$$\therefore [abc] \neq 0.$$

तो हमें सिद्ध करना है कि

$$[b \times c, c \times a, a \times b] \neq 0.$$

$$\text{अब } [b \times c, c \times a, a \times b] = (b \times c) \times (c \times a) \cdot (a \times b).$$

$$= ([bca] c - [cca] b) \cdot (a \times b)$$

$$= [abc] c \cdot (a \times b) = [abc]^2 \neq 0.$$

चूँकि $[abc] \neq 0$.

अतः $b \times c, c \times a, a \times b$ असमतलीय हैं । हम किसी सदिश a को इन में अभिव्यक्त कर सकते हैं ।

$$\text{माना } a = l(b \times c) + m(c \times a) + n(a \times b) \quad \dots (1)$$

दोनों ओर क्रमिक a, b, c से गुणा करने पर

$$a \cdot a = l[abc], \text{ या } l = \frac{a \cdot a}{[abc]} \quad \dots (2)$$

$$a \cdot b = m[abc], \text{ या } m = \frac{a \cdot b}{[abc]}.$$

$$a \cdot c = n[abc], \text{ या } n = \frac{a \cdot c}{[abc]}.$$

$$\text{अतः } a = \frac{1}{[abc]} \{a \cdot a(b \times c) + a \cdot b(c \times a) + a \cdot c(a \times b)\} \quad \dots (3)$$

इसी प्रकार हम b और c का मान भी ज्ञात कर सकते हैं ।

(2) यदि a, b, c तीन प्रथमतः सदिश हो तो $b \times c, c \times a, a \times b$ को a, b, c में अभिव्यक्त करो ।

$$\text{माना } b \times c = la + mb + nc \quad \dots (1)$$

दोनों ओर $b \times c, c \times a, a \times b$ का वारी-वारी से गुणा करने पर

$$(b \times c) \cdot (b \times c) = l [abc], \text{ या } l = \frac{(b \times c)^2}{[abc]}.$$

$$(b \times c) \cdot (c \times a) = m [abc], \text{ या } m = \frac{(b \times c) \cdot (c \times a)}{[abc]}.$$

$$(b \times c) \cdot (a \times b) = n [abc], \text{ या } n = \frac{(b \times c) \cdot (a \times b)}{[abc]}.$$

(1) में l, m और n का मान रखने पर

$$b \times c = \frac{1}{[abc]} \{ (b \times c)^2 a + (b \times c) \cdot (c \times a) b + (b \times c) \cdot (a \times b) c \} \quad \dots (2)$$

इसी प्रकार हम $c \times a$, और $a \times b$ का मान भी ज्ञात कर सकते हैं ।

उदाहरण 1. सिद्ध करो कि

$$(b \times c) \cdot (a \times d) + (c \times a) \cdot (b \times d) + (a \times b) \cdot (c \times d) = 0$$

और निगमन करो कि

$$\begin{aligned} \sin (A+B) \sin (A-B) &= \sin^2 A - \sin^2 B \\ &= \frac{1}{2} (\cos 2B - \cos 2A). \end{aligned}$$

[लखनऊ 52, 55, 59, आगरा 50, 53, 60, इलाहाबाद 60, दिल्ली 61, कर्नाटक 62, बनारस 53.]

हम जानते हैं कि

$$(a \times b) \cdot (c \times d) = (a \cdot c) (b \cdot d) - (b \cdot c) (a \cdot d). \quad \dots (1)$$

$$(b \times c) \cdot (a \times d) = (b \cdot a) (c \cdot d) - (b \cdot d) (c \cdot a) \quad \dots (2)$$

$$(c \times a) \cdot (b \times d) = (c \cdot b) (a \cdot d) - (c \cdot d) (a \cdot b). \quad \dots (3)$$

$$(1) + (2) + (3) = 0.$$

$$\therefore (a \times b) \cdot (c \times d) + (b \times c) \cdot (a \times d) + (c \times a) \cdot (b \times d) = 0. \quad \dots(4)$$

माना चार समतलीय-बिन्दु A, B, C, D हैं। और उनके स्थिति-सदिश मूल-बिन्दु O के सापेक्ष क्रमशः a, b, c, d हैं। और

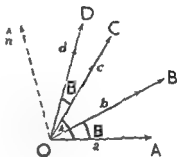
$$\angle AOC = A, \angle COD = \angle AOB = B \quad \dots(5)$$

मान \hat{n} , समतल पर इकाई-सदिश है।

$$\text{तब } (b \times c) \cdot (a \times d) =$$

$$[bc \sin(A - B)\hat{n}].$$

$$[ad \sin(A + B)\hat{n}]$$



$$= abcd \sin(A + B) \sin(A - B) \quad \dots(6)$$

इसी प्रकार

$$(c \times a) \cdot (b \times d) = -abcd \sin(A) \sin(A).$$

$$\text{और } (a \times b) \cdot (c \times d) = abcd \sin B \sin B \quad \dots(8)$$

(4), (6), (7) और (8) से

$$\sin(A + B) \sin(A - B) - \sin^2 A + \sin^2 B = 0.$$

$$\text{या } \sin(A + B) \sin(A - B) = \sin^2 A - \sin^2 B.$$

2. सिद्ध करो कि

$$a \times (b \times c), b \times (c \times a) \text{ और } c \times (a \times b) \text{ समतलीय हैं।}$$

[राश. 58, 70]

$$\vec{p} = a \times (b \times c) = (a \cdot c)b - (a \cdot b)c. \quad \dots(1)$$

$$\vec{q} = b \times (c \times a) = (b \cdot a)c - (b \cdot c)a \quad \dots(2)$$

$$\vec{r} = c \times (a \times b) = (c \cdot b)a - (c \cdot a)b \quad \dots(3)$$

$$\vec{p}, \vec{q}, \vec{r} \text{ समतलीय है यदि } [\vec{p} \vec{q} \vec{r}] = 0.$$

$$\text{या } \vec{p} \cdot (\vec{q} \times \vec{r}) = 0.$$

$$\text{अब } \vec{q} \times \vec{r} = [(b.a) \vec{c} - (b.c) \vec{a}] = [(c.b) \vec{a} - (c.a) \vec{b}].$$

$$= (b.a) (c.b) (\vec{c} \times \vec{a}) - (b.a) (c.a) (\vec{c} \times \vec{b}) + (b.c) (c.a) (\vec{a} \times \vec{b})$$

$$\vec{p} \cdot \vec{q} \times \vec{r} = (a.b) (b.c) (c.a) [abc] + \dots \text{अब सब पद शून्य हैं}$$

$$\text{क्योंकि } [bbc] = 0 = [abb]$$

$$\text{परन्तु } [abc] = 0.$$

$$\therefore [\vec{p} \vec{q} \vec{r}] = 0 \text{ इसलिए } \vec{p}, \vec{q}, \vec{r} \text{ समतलीय हैं।}$$

3 सिद्ध करो कि

$$a \times \{b \times (c \times d)\} = (b.d) (a \times c) - (b.c) (a \times d).$$

[दिल्ली 51, आगरा 55, पंजाब 59]

अतः विस्तार करो

$$a \times \{b \times \{c \times (d \times e)\}\}.$$

$$\text{हल. } b \times \{c \times d\} = (b.d) \vec{c} - (b.c) \vec{d}. \quad \dots (1)$$

दोनों ओर a की सदिश-गुणा करने पर

$$a \times \{b \times (c \times d)\} = (b.d) (a \times c) - (b.c) (a \times d). \quad \dots (2)$$

$$\text{अतः } b \times \{c \times (d \times e)\} = (c.e) (b \times d) - (c.d) (b \times e) \dots (5)$$

(5) में दोनों ओर a से सदिश-गुणा करने पर

$$a \times \{b \times \{c \times (d \times e)\}\} = (c.e) \{a \times (b \times d)\} - c.d \{a \times (b \times e)\}.$$

$$= (c.e) \{(a.d) \vec{b} - (a.b) \vec{d}\} - (c.d) \{(a.e) \vec{b} - (a.b) \vec{e}\}$$

4. समीकरण हल करो

$$\vec{x} \times \vec{a} = \vec{b}, \quad (a.b) \neq 0$$

सदिश a, b , और $a \times b$ असमतलीय हैं क्योंकि $(a \times b)$ दोनों सदिशों,

a और b पर लम्ब है इसलिए x को इनके एक-सात सम्बन्ध में अभिव्यक्त कर सकते हैं।

$$\vec{x} = l\vec{a} + m\vec{b} + n(\vec{a} \times \vec{b}). \quad \dots (1)$$

दोनों ओर \vec{a} से सदिश-गुणा करने पर ओर

$$\vec{x} \times \vec{a} = \vec{b} \quad \dots (2)$$

में \vec{x} का मान रखने से

$$\{l\vec{a} + m\vec{b} + n(\vec{a} \times \vec{b})\} \times \vec{a} = \vec{b}.$$

$$\text{या } m(\vec{b} \times \vec{a}) + n(\vec{a} \times \vec{b}) \times \vec{a} = \vec{b}.$$

$$\text{या } m(\vec{b} \times \vec{a}) + n(\vec{a} \cdot \vec{a})\vec{b} - n(\vec{a} \cdot \vec{b})\vec{a} = \vec{b} \quad \dots (3)$$

दोनों ओर \vec{a}, \vec{b} ओर $(\vec{b} \times \vec{a})$ के गुणांक की तुलना करने में

$$m=0, \quad n(\vec{a} \cdot \vec{a}) = 1, \quad n(\vec{a} \cdot \vec{b}) = 0.$$

$$n = \frac{1}{\vec{a} \cdot \vec{a}}, \quad m=0. \quad \dots (4)$$

(1) में मान रखने पर

$$\vec{x} = l\vec{a} + \frac{1}{\vec{a} \cdot \vec{a}} (\vec{a} \times \vec{b}). \quad \dots (5)$$

5. युगपद समीकरण को हल करो

$$p\vec{x} + q\vec{y} = \vec{a} \quad \dots (1)$$

$$\vec{x} \times \vec{y} = \vec{b}. \quad \dots (2)$$

समीकरण (1) को \vec{x} का सदिश-गुणा करो। तो

$$q\vec{x} \times \vec{y} = \vec{x} \times \vec{a}. \quad \dots (3)$$

(2) ओर (3) से

$$\vec{x} \times \vec{a} = qb. \quad \dots (4)$$

समीकरण (4) तो ऊपर उदाहरण (4) में हल कर चुके हैं। घत

$$\vec{x} = l\vec{a} + \frac{q(\vec{a} \times \vec{b})}{\vec{a} \cdot \vec{a}}. \quad \dots (5)$$

(1) में मान रखने पर

$$\vec{q}y = a - p \left\{ 1a + q \frac{(a \times b)}{a \cdot a} \right\}.$$

$$\text{या } \vec{y} = \frac{1}{q} (1 - pf) a - p \frac{(a \times b)}{a^2} \quad \dots (6)$$

प्रश्नावली 10

1. सरल करो

$$(i) (a \times b) (c \times d) + (a \times c) (d \times b) + (a \times d) (b \times c).$$

$$(ii) (a \times b) \times (c \times d) + (a \times c) \times (d \times b) + (a \times d) \times (b \times c).$$

[भाग 63]

2. सिद्ध करो कि

$$[a \times b, a \times c, d] = (a \cdot d) [abc]. \quad [\text{लघनक 59}]$$

3. एक ऐसे सदिशों का सैट ज्ञात करो जो निम्न सदिशों के व्युत्क्रम हों

$$2i + 3j - k, i - j - 2k, -i + 2j + 2k.$$

4. सिद्ध करो कि $(b \times c) \times (c \times a) = [abc] c$.

और इनमें निगमन करो (deduce) कि [भाग 41]

$$[b \times c, c \times a, a \times b] = [abc]^2.$$

[भाग 53, वनारस 56, आगरा 58, राज० 63, पंजाब 60]

5. सिद्ध करो कि

$$[a \times p, b \times q, c \times r] + [a \times q, b \times r, c \times p] + [a \times r, b \times p, c \times q] = 0. \quad [\text{लघनक 55, बिहार 62}]$$

[संकेत पहले कोष्ठ को X , $(Y \times Z)$, दूसरे को Y , $(Z \times X)$ और तीसरे को Z , $(X \times Y)$ मान कर विस्तार करो और जोड़ दो]

6. सिद्ध करो कि

$$\begin{aligned} [a \times b, c \times d, e \times f] &= [abd] [cef] - [abc] [def]. \\ &= [abc] [fed] - [abf] [ecd]. \\ &= [cda] [bef] - [cdb] [aef]. \end{aligned}$$

(आगरा 56, 60, 61, 66)

7. यदि a, b, c और a', b', c' क्रमशः परस्पर व्युत्क्रम हो तो सिद्ध करो कि

$$(i) a \times a' + b \times b' + c \times c' = 0.$$

$$(ii) a' \times b' + b' \times c' + c' \times a' = \frac{a+b+c}{[abc]}$$

$$(iii) a a' + b b' + c c' = 3.$$

8. यदि चार सदिशों का योग शून्य हो तो सिद्ध करो कि प्रत्येक सदिश दूसरे तीनों सदिशों की दिशाओं में इकाई सदिशों के प्रदिश-त्रिक-गुणनफल के समानुपाती होता है। (रेनकिन का प्रमेय)

(बनारस 55, बिहार 61)

[सकेंत $\hat{a}, \hat{b}, \hat{c}, \hat{d}$ इकाई सदिश लें तो

$$\hat{a}\hat{a} + \hat{b}\hat{b} + \hat{c}\hat{c} + \hat{d}\hat{d} = 0.$$

$\hat{b} \times \hat{c}$, और $\hat{c} \times \hat{d}$ इत्यादि से गुणा करो ...]

9. सिद्ध करो कि यदि $[abc] \neq 0$, तो

$$\begin{aligned} (r \cdot c) (a \cdot b) - (r \cdot b) (c \cdot a) &= \frac{[rca]}{[abc]} \{ (c \cdot b) (a \cdot b) - (c \cdot a) (b \cdot b) \} \\ &- \frac{[rab]}{[abc]} \{ (a \cdot c) (b \cdot c) - (a \cdot b) (c \cdot c) \} \end{aligned}$$

[बनारस 62]

10. यदि चार सदिश a, b, c, d समतलीय हो तो सिद्ध करो कि $(a \times b) \times (c \times d) = 0$.

11. युगपद समीकरण हल करो

$$r \times b = a \times b,$$

$$\text{और } r \cdot c = 0.$$

दिया हुआ है कि c, b पर लम्ब नहीं है।

[मार्गदर्शक पहले समीकरण को $r = a + tb$ लिखो ..]

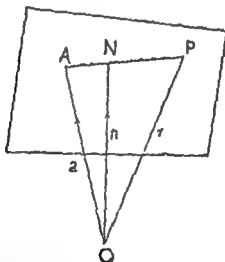
ज्यामितीय अनुप्रयोग

6.1 परिचय:

हम अध्याय 3 में सरल-रेखा और समतल के समीकरणों का विवरण कर चुके हैं इस अध्याय में हम सरल रेखा, समतल और गोल के समीकरणों का दूसरा रूप बताएंगे और कुछ समस्याओं पर विस्तारपूर्वक विचार करेंगे।

6.2 समतल का समीकरण अभिलम्ब रूप में। (Equation of the plane in normal form.)

6.2 (1) उस समतल का समीकरण ज्ञात करना जो बिन्दु A में से गुजरे और सदिश n पर लम्ब हो।



माना मूल-बिन्दु O के सापेक्ष बिन्दु A का स्थिति-सदिश a है और समतल पर किसी बिन्दु P का स्थिति-सदिश r है।

माना θ अभिमन्ध $\vec{ON} = n$,

$$\text{तो } \vec{AP} = r - a \quad \dots (1)$$

घोर चूँकि \vec{AP} , n पर लम्ब है

$$\therefore (r - a) \cdot n = 0 \quad \dots (2)$$

जोकि समतल का अभीष्ट समीकरण है।

समीकरण (2) को हम निम्न विधि से भी लिख सकते हैं।

$$(r - a) \cdot \hat{n} = 0.$$

$$\text{या } r \cdot \hat{n} = a \cdot \hat{n} \quad (3)$$

परन्तु $a \cdot \hat{n}$ सदिश का \vec{ON} की दिशा में प्रक्षेप है।

$$\text{माना } a \cdot \hat{n} = p \quad \dots (4)$$

तो (3) और (4) से समतल का समीकरण है

$$r \cdot \hat{n} = p \quad \dots (5)$$

यह समतल का अभिमन्ध कभी समीकरण है।

व्यापक रूप में यदि $r \cdot n = q$ हो तो यह तब समतल का समीकरण है जो मूलबिन्दु में से गुजरता है और सदिश n पर लम्ब है। और इस पर मूल-बिन्दु से लम्ब q/n है।

विशेष स्थिति में यदि समतल मूल-बिन्दु में से गुजरे तो उसका समीकरण

$$r \cdot n = 0 \quad \dots (6)$$

6.2 (2) ऐसे समतल का समीकरण ज्ञात करना जो सदिश b और c के समान्तर हों और बिन्दु a में से गुजरे।

चूँकि समतल b और c के समान्तर है इसलिए $(b \times c)$ इस पर लम्ब होगा

\therefore ऊपर समीकरण (2) से इसका समीकरण

$$(r - a). (b \times c) = 0. \quad \dots(1)$$

$$\text{या } [rbc] = [abc]. \quad \dots(2)$$

6.3 (3) तीन बिन्दु a, b, c (प्रसमरेखा) में से होकर जाने वाले समतल का समीकरण ज्ञात करना ।

चूँकि समतल a, b, c में से हो कर जाता है इसलिए वह $a - b$ और $b - c$ के समान्तर है । अतः इसका समीकरण

$$(r - a). \{(a - b) \times (b - c)\} = 0. \text{ है ।} \quad \dots(1)$$

$$\text{या } (r - a). (a \times b + c \times a + b \times c) = 0. \quad \dots(2)$$

उपप्रेम्य . प्रतिबन्ध, कि चार बिन्दु a, b, c, d समतलीय हो ।

हल. a, b, c में से होकर जाने वाले समतल का समीकरण

$$r. (a \times b + b \times c + c \times a) = a. (a \times b + b \times c + c \times a)$$

$$\text{यदि बिन्दु } d \text{ इस पर स्थित है तो } = [abc] \quad (3)$$

$$d. (a \times b + b \times c + c \times a) = [abc].$$

$$\text{या } [abc] + [acd] - [dbc] - [dab] = 0 \quad \dots(4)$$

6.2(4) उस समतल का समीकरण ज्ञात करना जो दो बिन्दुओं a और b में से होकर जाय और दी हुई रेखा के समान्तर हो ।

माना c सदिश दी हुई रेखा के समान्तर है । तो, चूँकि a , और b उस समतल पर स्थित हैं तो समतल $(a - b)$ के भी समान्तर होगा ।

∴ (6.3) अनुच्छेद के अनुसार समतल का समीकरण

$$(r - a). (a - b \times c) = 0.$$

$$\text{या } r. (a - b) \times c = a. (a - b) \times c$$

$$\text{या } r. (a - b) \times c = [acb]. \quad \dots(1)$$

6.25 एक दी हुई सरल रेखा और एक बिन्दु में से होकर जाने वाले समतल का समीकरण ज्ञात करना ।

माना दी हुई सरल-रेखा का समीकरण

$$r = a + tb \text{ है ।} \quad \dots(1)$$

सरल-रेखा (1) और बिन्दु c में से गुजरने वाला समतल बिन्दु a और

c में से होकर जाएगा और सदिश b के समान्तर होगा धन. (6.25) के धनु-
मार इसका समीकरण

$$r \cdot (a - c) \times b = [abc] \quad \dots (1)$$

6.3 समतल के इन समीकरणों के कार्तीय तुल्य (Cartesian equivalents of the equations of the plane)

(1) धनुच्छेद 6.2 में यदि A और P के निर्देशांक (x_1, y_1, z_1) और

(x, y, z) हैं और $\vec{n} = n_1 \hat{i} + n_2 \hat{j} + n_3 \hat{k}$ तो

$$\vec{AP} = (x - x_1) \hat{i} + (y - y_1) \hat{j} + (z - z_1) \hat{k}. \quad \dots (1)$$

($\hat{i}, \hat{j}, \hat{k}$ धनो की दिशाओं में इकाई सदिश हैं।)

तो $\vec{AP} \cdot \vec{n} = 0$.

या $\{(x - x_1) \hat{i} + (y - y_1) \hat{j} + (z - z_1) \hat{k}\} \cdot (n_1 \hat{i} + n_2 \hat{j} + n_3 \hat{k}) = 0$.

या $n_1 (x - x_1) + n_2 (y - y_1) + n_3 (z - z_1) = 0. \quad \dots (2)$

या $n_1 x + n_2 y + n_3 z = (n_1 x_1 + n_2 y_1 + n_3 z_1)$

और यदि इकाई सदिश \hat{n} के दिक्कोण्य (direction cosine) (l, m, n)

हैं और $ON = p$ तो समतल का समीकरण 6.25 से

$(x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k}) \cdot (l\hat{i} + m\hat{j} + n\hat{k}) = p$.

या $lx + my + nz = p. \quad \dots (3)$

(2) इसी प्रकार हम तीन बिन्दुओं में से हो कर जाने वाले समतल का समीकरण (देखो 6.24) कार्तीय निर्देशांको में निकाल सकते हैं।

माना तीन बिन्दु

$a = (a_1 \hat{i} + a_2 \hat{j} + a_3 \hat{k}), b = (b_1 \hat{i} + b_2 \hat{j} + b_3 \hat{k}),$ और

$c = (c_1 \hat{i} + c_2 \hat{j} + c_3 \hat{k})$ हैं। तो

माना $\vec{d} = \vec{a} \times \vec{b} + \vec{b} \times \vec{c} + \vec{c} \times \vec{a}. \quad \dots (4)$

और यदि P (x, y, z) समतल पर कोई बिन्दु है और $\vec{OP} =$

$r = (x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k})$ है।

$$\text{तो } d \cdot (r - a) = 0$$

....(5)

(4) में a, b, c का मान रखने पर

$$d = \begin{vmatrix} i & j & k \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} i & j & k \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} i & j & k \\ c_1 & c_2 & c_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 \end{vmatrix} \quad \text{....(6)}$$

(5) और (6) से

$$\begin{vmatrix} x - a_1 & y - a_2 & z - a_3 & 0 \\ a_1 & a_2 & a_3 & 1 \\ b_1 & b_2 & b_3 & 1 \\ c_1 & c_2 & c_3 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

$$\text{या } \begin{vmatrix} x & y & z & 1 \\ a_1 & a_2 & a_3 & 1 \\ b_1 & b_2 & b_3 & 1 \\ c_1 & c_2 & c_3 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

इसी प्रकार से हम दूसरे समीकरणों का भी बार्तीय तुरन्त ज्ञात कर सकते हैं।

6.4 दो समतलों के बीच का कोण : (angle between the two planes)

माना $r \cdot \vec{n}_1 = p$ और $r \cdot \vec{n}_2 = q$ दो समतल हैं। तो इन दोनों के बीच का कोण इनके अभिलम्बों के बीच के कोण के बराबर है अर्थात् \vec{n}_1

और \vec{n}_2 के बीच का कोण

माना \vec{n}_1 और \vec{n}_2 के बीच का कोण θ है तो

$$\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2 = |\vec{n}_1| |\vec{n}_2| \cos \theta$$

$$\text{या } \theta = \cos^{-1} \frac{\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2}{|\vec{n}_1| |\vec{n}_2|} \quad \text{....(1)}$$

6.5 अक्षों पर अंतः खंड ज्ञात करना (To find the intercepts on the Coordinate axes)

माना समतल का समीकरण

$$r \cdot \vec{n} = p \quad \text{....(1)}$$

घोर x, y, z अक्षों पर अंतः खंड क्रमशः a, b, c हैं घोर i, j, k अक्षों की दिशाओं में इकाई सदिश हैं। तब तीन बिन्दु ai, bj घोर ck समीकरण (1) को संतुष्ट करते हैं।

$$\therefore ai.n = p$$

$$\text{या } a = \frac{p}{i.n} \quad \dots(2)$$

$$\text{इसी प्रकार } b = \frac{p}{j.n} \quad \dots(3)$$

$$\text{घोर } c = p/k.n \quad \dots(4)$$

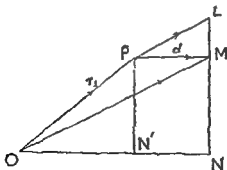
6.6 किसी बिन्दु की समतल से दूरी। (Distance of a point from the plane)

माना समतल का समीकरण

$$\hat{r} \cdot \hat{n} = p. \quad \dots(1)$$

घोर P दिया हुआ बिन्दु है जिसका मूल-बिन्दु के सापेक्ष स्थिति-सदिश r_1 है।

■ में से दिए हुए समतल के समान्तर समतल खींचो।



माना O से इस समतल पर लम्ब $P_1 \equiv ON_1$ है तो इस समतल का समीकरण है।

$$\hat{r} \cdot \hat{n} = p_1. \quad \dots(2)$$

परन्तु बिन्दु P_1 इस पर स्थित है।

$$\therefore r_1 \cdot \hat{n} = p_1 \quad \dots(3)$$

दोनों समतलों के बीच की दूरी $= PM - N_1 N$.

या P से समतल की दूरी

$$d = p - p_1 = p - r_1 \cdot \hat{n} \quad \dots(4)$$

अर्थात् समतल के अभिलम्ब रूपी समीकरण में यदि r के स्थान पर बिन्दु का स्थिति-सदिश r_1 रखा जाय तो वह उस बिन्दु की समतल से दूरी होगी।

PM धन है यदि P समतल के उस ओर पड़ता है जिस ओर मूल-बिन्दु है और PM ऋण है यदि मूल-बिन्दु O और P समतल से विपरीत दिशाओं में हैं।

अभिलम्ब-वाह M का स्थिति-सदिश ज्ञात करने के लिए

$$\begin{aligned} \vec{OM} &= \vec{OP} + \vec{PM} \\ &= r_1 + d \cdot \hat{n} \\ &= r_1 + (p - r_1 \cdot \hat{n}) \hat{n} \end{aligned} \quad \dots(5)$$

उपग्रन्थः बिन्दु P ($=r_1$) की समतल से दी हुई दिशा में दूरी ज्ञात करना।

माना दी हुई दिशा में इकाई सदिश \hat{b} है।

$$\text{तो वाञ्छनीय दूरी } PL = x \hat{b}. \quad \dots(6)$$

$$\text{और } \vec{OL} = \vec{OP} + \vec{PL}$$

$$= r_1 + x \hat{b}.$$

परन्तु L समतल (1) पर स्थित है

$$\therefore (r_1 + x \hat{b}) \cdot \hat{n} = p.$$

$$\text{या } x = \frac{p - r_1 \cdot \hat{n}}{\hat{b} \cdot \hat{n}} \quad \dots (7)$$

6.7 दो समतलों को बीच के कोण को समद्विभाग करने वाले समतलों के समीकरण ज्ञात करना। (To find the equation of the planes which bisect the angles between the two planes)

$$\text{माना } r \cdot \hat{n}_1 = p_1 \quad \dots (1)$$

$$\text{और } r \cdot \hat{n}_2 = p_2 \quad \dots (2)$$

दो समतलों के समीकरण हैं।

कोई बिन्दु r_1 , जो कि (1) और (2) के बीच के कोण के समद्विभाजक समतल पर स्थित है, वह (1) और (2) से समान दूरी पर है।

$$\therefore p_1 - r_1 \cdot \hat{n}_1 = \pm (p_2 - r_1 \cdot \hat{n}_2).$$

यदि समद्विभाजक उस कोण का है जिसमें मूल-बिन्दु है। तो दोनों और चिह्न एक सा होगा। और जिस कोण में मूल-बिन्दु न हो उस कोण के समद्विभाजक के लिए चिह्न विपरीत होंगे।

अतः दोनों समद्विभाजकों के समीकरण

$$p_1 - r_1 \cdot \hat{n}_1 = (p_2 - r_1 \cdot \hat{n}_2)$$

$$\text{या } p_1 - p_2 = r_1 \cdot (\hat{n}_1 - \hat{n}_2) \quad \dots (3)$$

$$\text{और } p_1 + p_2 = r_1 \cdot (\hat{n}_1 + \hat{n}_2) \quad \dots (4)$$

दोनों समद्विभाजक एक-दूसरे पर लम्ब है क्योंकि

$$(\hat{n}_1 - \hat{n}_2) \cdot (\hat{n}_1 + \hat{n}_2) = \hat{n}_1^2 - \hat{n}_2^2 = 1 - 1 = 0 \quad \dots (5)$$

6.8 दो समतलों की प्रतिच्छेद-रेखा में से होकर जाने वाले समतल का समीकरण। (Plane containing the line of intersection of two planes.)

$$\text{माना } r \cdot \hat{n}_1 = p_1, \quad \dots(1)$$

$$\text{और } r \cdot \hat{n}_2 = p_2, \quad \dots(2)$$

दो समतलों के समीकरण हैं। तो समीकरण

$$(r \cdot \hat{n}_1 - p_1) + \lambda(r \cdot \hat{n}_2 - p_2) = 0.$$

$$\text{या } r \cdot (\hat{n}_1 + \lambda \hat{n}_2) = p_1 + \lambda p_2. \quad \dots(3)$$

जबकि λ एक अदिश-राशि है, एक समतल का समीकरण है।

समीकरण (3) उन सब बिन्दुओं से संतुष्ट होता है जो दोनों समतलों में अभ्यनिष्ठ है। और यह सदिश $\hat{n}_1 + \lambda \hat{n}_2$ पर अभिलम्ब है।

6.9 सरल-रेखा का समीकरण। (equation of a st. line.)

(i) उस सरल-रेखा का समीकरण ज्ञात करना जोकि सदिश b के समान्तर हो और बिन्दु $A (=a)$ में से होकर जाय।

माना सरल रेखा पर कोई बिन्दु P है। और P का मूलबिन्दु O के सापेक्ष स्थिति-सदिश r है। बिन्दु A का स्थिति-सदिश

$$= \vec{OA} = a, \quad (1)$$

$$\vec{AP} = (r - a), \quad \dots(2)$$

किन्तु \vec{AP} सदिश b के समान्तर है।

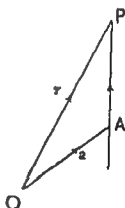
$$\therefore (r - a) \times b = 0, \quad \dots(3)$$

समीकरण (3) सरल-रेखा का अभीष्ट समीकरण है। विशेष स्थिति में यदि $a = 0$, तो

$$r \times b = 0, \quad \dots(4)$$

(4) उस सरल रेखा का समीकरण है जो सदिश b के समान्तर है और मूलबिन्दु से गुजरती है।

(ii) उस सरल रेखा का समीकरण ज्ञात करना जो बिन्दु a में से



गुजरती है और दो दिए हुए सदिशों b और c पर लम्ब हो

यह स्पष्ट है कि वह सरल-रेखा $b \times c$ के समान्तर होगी। अतः उसका समीकरण है।

$$(r-a) \times (b \times c) = 0. \quad \dots (5)$$

$$\text{या } r \times b \times c = a \times b \times c \quad \dots (6)$$

6.10 बिन्दु P को, दी हुई सरल-रेखा $r = a + tb$ (जबकि b इकाई सदिश है) से लम्बवत दूरी ज्ञात करना। (To find the perpendicular distance of a point from the given st line)

दी हुई रेखा बिन्दु a में से गुजरती है।

माना P का, किसी मूलबिन्दु O के सापेक्ष स्थिति-सदिश r_1 है और PM सरल-रेखा पर P से लम्ब है। तो

$$\vec{PA} = a - r_1. \quad \dots (1)$$

$$PM^2 = PA^2 - AM^2.$$

$$= (a - r_1)^2 - \{(a - r_1) \cdot b\}^2. \quad \dots (2)$$



$\therefore MA (a - r_1)$ का b की दिशा में प्रक्षेप है।

समीकरण (2) से PM की सम्पाई p प्राप्त है।

सदिश के रूप में

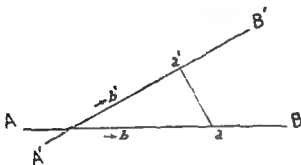
$$\vec{PM} = \vec{PA} - \vec{MA}.$$

$$= \{a - r_1\} - b \cdot (a - r_1)b. \quad \dots (3)$$

इसका मापांक p है।

6.11 दो सरल-रेखाओं के प्रतिच्छेदन करने का प्रतिबन्ध या दो सरल-रेखाओं के समतलीय होने का प्रतिबन्ध । (Condition for intersection of two straight lines or condition for coplanarity of two lines)

माना AB और A' B' दो सरल रेखाएँ हैं जिनके समीकरण क्रमशः



$$r = a + tb, \quad \dots (1)$$

$$r = a' + tb'. \quad \dots (2)$$

है । और वे a व a'

बिन्दुओं से क्रमशः गुजरती हैं । और b व b' के समान्तर हैं ।

यदि यह रेखाएँ एक-दूसरे को काटती हैं तो वह एक ही समतल में स्थित होंगी जो $b, b',$ और $a - a'$ के समान्तर है । परन्तु $b, b',$ और $(a - a')$ समतलीय होंगे यदि

$$[b, b', a - a'] = 0. \quad \dots (3)$$

$$\text{या } [abb'] = [a'bb']. \quad \dots (4)$$

इन रेखाओं में से होकर जाने वाले समतल का समीकरण

$$(r - a) \cdot (b \times b') = 0.$$

$$\text{या } [rbb'] = [abb']. \quad \dots (5)$$

6.12 दो अप्रतिच्छेदी सरल-रेखाओं के बीच न्यूनतम दूरी ।]

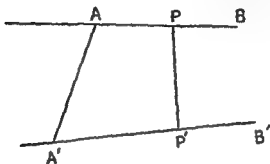
(Shortest distance between two non-intersecting lines)

माना दो सरल-रेखाएँ AB और A' B' क्रमशः

$$r = a + tb. \quad \dots (1)$$

$$r = a' + tb' \quad \dots (2)$$

है। (1) बिन्दु $A (=a)$ मे से गुजरती है और b के समान्तर है और (2) बिन्दु $A' (=a')$ मे से होकर जाती है और b' के समान्तर है।



$$\vec{A'A} = a - a' \quad \dots (3)$$

माना PP' न्यूनतम-दूरी है, तो PP' , AB तथा $A'B'$ दोनों पर लम्ब है। अतः यह $b \times b'$ के समान्तर है।

PP' , AA' का $b \times b'$ पर प्रक्षेप है। अतः

$$\begin{aligned} PP' &= \frac{(a - a') \cdot (b \times b')}{|b \times b'|} \\ &= \frac{1}{|b \times b'|} [b, b', a - a'] \quad \dots (4) \end{aligned}$$

नोट : यदि दोनों रेखाएँ समतलीय हों तो $PP' = 0$.

$$\text{या } [b, b', a - a'] = 0.$$

PP' का समीकरण ज्ञात करना :—

माना PP' पर कोई बिन्दु r है। तो $(r - a)$, और $b \times b'$ समतलीय है। अतः AP और PP' मे से होकर जाने वाले समतल का समीकरण

$$[r - a, b, b \times b'] = 0 \quad \dots (5)$$

इसी प्रकार $A'P'$ और PP' मे से हो कर जाने वाले समतल का समीकरण है

$$[r - a', b', b \times b'] = 0 \quad \dots (6)$$

(5) और (6) की प्रतिच्छेदन-रेखा PP' है।

उपप्रेम्य-यदि हम PP' के मध्य बिन्दु को मूल-बिन्दु लें तो हम AB और $A'B'$ के समीकरण निम्न रूप से लिख सकते हैं।

$$r = c + tb.$$

$$\text{और } r = c + sb'$$

$$\text{जबकि } c = \frac{1}{2} \vec{P'P}.$$

उदाहरण 1.

तीन बिन्दुओं $A(2, 3, -1)$, $B(4, 5, -2)$ और $C(3, 6, 5)$ से होकर जाने वाले समतल का समीकरण ज्ञात करो।

माना $P(x, y, z)$ समतल पर कोई बिन्दु है। तो

सदिश \vec{AP} , \vec{AB} , और \vec{AC} समतलीय हैं। अर्थात्

$(x-2, y-3, z+1)$, $(2, 2, 3)$ और $(1, 3, 6)$ समतलीय-सदिश हैं। इसलिए

$$[\vec{AP}, \vec{AB}, \vec{AC}] = 0$$

$$\text{या } \begin{vmatrix} x-2 & y-3 & z+1 \\ 2 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 6 \end{vmatrix} = 0.$$

$$\text{या } 3(x-2) - 9(y-3) + 4(z+1) = 0.$$

$$\text{या } 3x - 9y + 4z + 25 = 0.$$

उदाहरण 2.

सिद्ध करो कि बिन्दु $(1-i+3k)$ और $(3i+3j+3k)$.

समतल $r \cdot (5i+2j-7k) + 9 = 0$ से समान दूरी पर हैं और विपरीत ओर स्थित हैं। [कलकत्ता 62, आगरा 59]

समतल का समीकरण $r \cdot n = p$ है ... (1)

$$\text{या } r \cdot (5i+2j-7k) = -9.$$

$$\text{इसलिए सदिश } \hat{n} = \frac{5i+2j-7k}{\sqrt{78}}.$$

अतः समीकरण (1) को निम्न विधि से लिखा जा सकता है।

$$r. \frac{(5i + 2j - 7k)}{\sqrt{78}} = \frac{-9}{\sqrt{78}} = p. \quad \dots(2)$$

बिन्दु $(i - j + 3k)$ के लिए

$$\begin{aligned} p_1 = r_1 \cdot \hat{n} &= (i - j + 3k) \cdot \frac{(5i + 2j - 7k)}{\sqrt{78}} \\ &= \frac{5 - 2 - 21}{\sqrt{78}} = \frac{-18}{\sqrt{78}} \end{aligned} \quad \dots(3)$$

अतः बिन्दु $(i - j + 3k)$ की समतल से दूरी

$$= p_1 - p = \frac{-18}{\sqrt{78}} + \frac{9}{\sqrt{78}} = \frac{-9}{\sqrt{78}} \quad \dots(4)$$

इसी प्रकार बिन्दु $(3i + 3j + 3k)$ के लिए

$$\begin{aligned} p_2 = r_2 \cdot \hat{n} &= (3i + 3j + 3k) \cdot \frac{(5i + 2j - 7k)}{\sqrt{78}} \\ &= \frac{15 + 6 - 21}{\sqrt{78}} = 0. \end{aligned} \quad \dots(5)$$

∴ बिन्दु $(3i + 3j + 3k)$ की समतल से दूरी

$$= p_2 - p = 0 + \frac{9}{\sqrt{78}} = \frac{9}{\sqrt{78}}. \quad \dots(6)$$

(5) और (6) से स्पष्ट है कि दोनों बिन्दु समतल से समान दूरी पर हैं और समतल की विपरीत दिशाओं में हैं।

उदाहरण 3.

समतल $r. (3i - j + k) = 1$, और $r. (i + 4j - 2k) = 2$.

की प्रतिच्छेद-रेखा ज्ञात करो।

(पाथरा एम. एससी 45)

दोनों समतलों की प्रतिच्छेद-रेखा उनके अभिलम्बों \hat{n}_1 \hat{n}_2

या $(3i - j + k)$ और $(i + 4j - 2k)$ पर लम्ब होगी। अतः

वह $(3i - j + k) \times (i + 4j - 2k)$ के समान्तर होगी।

या $-2\mathbf{i} + 7\mathbf{j} + 13\mathbf{k}$ के समान्तर है।

माना मूल-बिन्दु O से A ($=\mathbf{a}$) इस रेखा पर सम्बन्धित है। तो इसका समीकरण होगा

$$(\mathbf{r} - \mathbf{a}) \times (-2\mathbf{i} + 7\mathbf{j} + 13\mathbf{k}) = 0 \quad \dots (1)$$

और \vec{OA} , \mathbf{n}_1 , \mathbf{n}_2 के समतल के समान्तर होगा इसलिए हम

$\vec{OA} = \mathbf{a}$ को \mathbf{n}_1 और \mathbf{n}_2 के एकसात-सम्बन्ध में अभिव्यक्त कर सकते हैं।

$$\begin{aligned} \therefore \vec{OA} = \mathbf{a} &= l\mathbf{n}_1 + m\mathbf{n}_2 \\ &= l(3\mathbf{i} - \mathbf{j} + \mathbf{k}) + m(\mathbf{i} + 4\mathbf{j} - 2\mathbf{k}) \end{aligned} \quad \dots (2)$$

जबकि l, m अदिश हैं।

चूँकि A दोनों समतलों पर स्थित है

$$\therefore (l\mathbf{n}_1 + m\mathbf{n}_2) \cdot \mathbf{n}_1 = 1.$$

$$\text{और } (l\mathbf{n}_1 + m\mathbf{n}_2) \cdot \mathbf{n}_2 = 2$$

$$\text{या } \{l(3\mathbf{i} - \mathbf{j} + \mathbf{k}) + m(\mathbf{i} + 4\mathbf{j} - 2\mathbf{k})\} \cdot (3\mathbf{i} - \mathbf{j} + \mathbf{k}) = 1.$$

$$\text{या } 11l - 3m = 1. \quad \dots (3)$$

$$\text{और } \{l(3\mathbf{i} - \mathbf{j} + \mathbf{k}) + m(\mathbf{i} + 4\mathbf{j} - 2\mathbf{k})\} \cdot (\mathbf{i} + 4\mathbf{j} - 2\mathbf{k}) = 2.$$

$$\text{या } -3l + 21m = 2 \quad \dots (4)$$

(3) और (4) से

$$l = \frac{27}{222}, m = \frac{25}{222} \quad \dots (5)$$

इसलिए सरल-रेखा का समीकरण है

$$\begin{aligned} \mathbf{r} &= \frac{27}{222}(3\mathbf{i} - \mathbf{j} + \mathbf{k}) + \frac{25}{222}(\mathbf{i} + 4\mathbf{j} - 2\mathbf{k}) + t(-2\mathbf{i} + 7\mathbf{j} \\ &\quad + 13\mathbf{k}). \end{aligned}$$

$$\text{या } \mathbf{r} = \frac{1}{222}(106\mathbf{i} + 73\mathbf{j} - 23\mathbf{k}) + t(-2\mathbf{i} + 7\mathbf{j} + 13\mathbf{k}) \dots (6)$$

दूसरी विधि में सरल-रेखा का समीकरण ऊपर (1) में प्राप्त कर सकते

हैं। (1) में λ का मान रखने पर

$$\left\{ r - \frac{1}{22} (106i + 71j - 23k) \right\} \times (-2i + 7j + 13k) = 0.$$

$$\text{या } r \times (-2i + 7j + 13k) = (5i - 6j + 4k). \quad \dots (7)$$

उदाहरण 4.

सिद्ध करो कि समतल $r \cdot (i + 2j + 3k) = 0$, और

$r \cdot (3i + 2j + k) = 0$ की प्रतिच्छेद-रेखा i और j की दिशाओं के साथ समान कोण बनाती है और j की दिशा के साथ $\frac{1}{2} \sec^{-1} 3$ का।

[भाग 61]

दोनों समतलों की प्रतिच्छेद-रेखा उनके अभिलम्बों पर लम्ब होगी।

अतः $(i + 2j + 3k) \times (3i + 2j + k)$ के समान्तर होगी।

अर्थात् $(-4i + 8j - 4k)$ के समान्तर होगी।

माना यह रेखा i, j, k की दिशाओं के साथ क्रमशः कोण

α, β, γ बनाती है। तो

$$\cos \alpha = i \cdot \frac{(-4i + 8j - 4k)}{\sqrt{96}} = \frac{-4}{4\sqrt{6}} = \frac{-1}{\sqrt{6}} \quad \dots (1)$$

$$\cos \beta = j \cdot \frac{(-4i + 8j - 4k)}{\sqrt{96}} = \frac{8}{4\sqrt{6}} = \frac{2}{\sqrt{6}}. \quad \dots (2)$$

$$\cos \gamma = k \cdot \frac{(-4i + 8j - 4k)}{\sqrt{96}} = \frac{-4}{4\sqrt{6}} = \frac{-1}{\sqrt{6}}. \quad \dots (3)$$

(1) और (3) से स्पष्ट है कि

$\alpha = \gamma$, और (2) से

$$\cos \beta = \frac{2}{\sqrt{6}}$$

$$\text{या } \cos 2\beta = 2 \cdot \frac{4}{6} - 1 = \frac{1}{3}.$$

$$\text{या } \sec 2\beta = 3$$

$$\text{या } \beta = \frac{1}{2} \sec^{-1} 3$$

उदाहरण 3.

उस सरल-रेखा का समीकरण ज्ञात करो जो बिन्दु C में से होकर जाय और सरल-रेखाओं

$$r = a + tb.$$

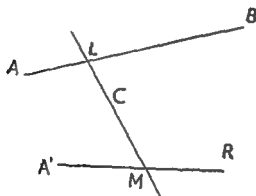
$$\text{और } r = a' + sb'.$$

को काटे।

[भाग 55, 61, दिल्ली 51, सखनऊ 61]

माना दो हुई रेखा

$$AB, r = a + tb$$



और $A'B', r = a' + sb'$ है।

माना LM वाञ्छनीय सरल-रेखा है।

चूँकि यह AB को काटती है, अतः यह

$$(a - c) \times b \text{ पर सम्बन्ध है} \quad \dots(1)$$

इसी प्रकार यह

$$(a' - c) \times b' \text{ पर सम्बन्ध है} \quad \dots(2)$$

अर्थात् यह

$$\{(a - c) \times b\} \times \{(a' - c) \times b'\}$$

के समान्तर है।

अतः सरल रेखा का समीकरण है।

$$(r - c) \times [\{(a - c) \times b\} \times \{(a' - c) \times b'\}] = 0.$$

उदाहरण 6.

सिद्ध करो कि एक समानान्तर फलक (parallelepiped) में, जिसके किनारे a, b, c हैं, किसी विकर्ण की उसकी न मिलने वाले किनारों से ग्यून-सम-दूरी

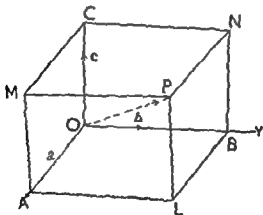
$$\frac{bc}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}, \frac{ca}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}, \frac{ab}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}} \text{ हैं।} \quad (\text{भाग 60})$$

माना समानान्तरफलक OALBCMPN के किनारे $\vec{OA}, \vec{OB}, \vec{OC}$ क्रमशः सदिश a, b, c द्वारा व्यक्त करते हैं।

$$\text{विकर्ण } \vec{OP} = a + b + c. \quad \dots (1)$$

\vec{OP} का समीकरण है

$$\vec{OP} = t(a + b + c). \quad \dots (2)$$



\vec{CM} का समीकरण

$$\vec{r} = c + sa. \quad \dots (3)$$

\vec{OP} और \vec{CM} के बीच में ग्यूनसम-दूरी

$$= \frac{(c-0) \cdot \{(a+b+c) \times a\}}{[c \times (a+b+c)]}$$

$$= \frac{[cba]}{[a \times b + a \times c]} \quad \dots(4)$$

परन्तु $a=ai$, $b=bj$, $c=ck$,

$$\therefore \text{न्यूनतम-दूरी} = \frac{abc}{|abk - acj|} = \frac{abc}{\sqrt{a^2b^2 + a^2c^2}}$$

$$= \frac{bc}{\sqrt{b^2 + c^2}} \quad \dots(5)$$

इसी प्रकार \vec{OP} की AL तथा LB से न्यूनतम-दूरी

$$\frac{ac}{\sqrt{a^2 + c^2}} \text{ और } \frac{ab}{\sqrt{a^2 + b^2}} \text{ है।}$$

प्रश्नावली 11

- उस समतल का समीकरण ज्ञात करो जो सरल-रेखा में $r = a + tb$ में से होकर जाय और समतल $r \cdot c = q$ पर सम्ब हो।
- उस समतल का समीकरण ज्ञात करो जो बिन्दु $A(3, -2, -1)$ में से गुजरे और सदिश $(1, -2, 4)$ और $(3, 2, -5)$ के समान्तर हो।
- सिद्ध करो कि सरल-रेखाएं
 $r \times a = b \times a$,
 और $r \times b = a \times b$,
 एक-दूसरे को काटती हैं।
[पंजाब 60]
- उस समतल का समीकरण ज्ञात करो जो बिन्दु $(2i + 3j - k)$ में से हो कर जाय और सदिश $(3i - 4j + k)$ पर सम्ब हों।
(पटना 48)
- उस समतल का समीकरण ज्ञात करो जो बिन्दु $(i + 2j - k)$ में से

हो कर जाय और समतल $r \cdot (3i - j + k) = 1$, और
 $r \cdot (i + 4j - 2k) = 2$ की प्रतिच्छेद-रेखा पर लम्ब हो।

[भागरा 64]

6. उस समतल का समीकरण ज्ञात करो जो बिन्दु $(-1, -1, -1)$ में से हो कर जाय और समतल

$$r \cdot (i + 3j - k) = 0, \text{ और } r \cdot (j + 2k) = 0,$$

की प्रतिच्छेद-रेखा में से भी गुजरे।

7. उस समतल का समीकरण ज्ञात करो जिसमें सरल-रेखा $r = 2i + j(j - k)$ स्थित हो और वह समतल $r \cdot (j + k) = 3$, पर लम्ब हो। और उस बिन्दु का स्थिति-सदिश ज्ञात करो जिस पर सरल-रेखा $r = i(2i + 3j + k)$ उस समतल को काटती है।

[दिल्ली 56]

8. सिद्ध करो कि समतल

$$r \cdot (2i + 5j + 3k) = 0,$$

$$r \cdot (i - j + 4k) = 2,$$

$$\text{और } r \cdot (7j - 5k) + 4 = 0,$$

एक ही सरल-रेखा में से गुजरते हैं।

9. निम्न समतलों के समद्विभाजक समतल ज्ञात करो

$$r \cdot (i + 2j + 2k) = 9,$$

$$\text{और } r \cdot (4i - 3j + 12k) + 13 = 0,$$

यह भी ज्ञात करो कि कौनसा उस कोण का समद्विभाजक है जिसमें मूल-बिन्दु स्थित है।

10. उस सरल-रेखा का समीकरण ज्ञात करो जो बिन्दु C में से गुजरती है और समतल $r \cdot a = 0$ के समान्तर है और रेखा $r - a' = b$ को काटती है।

[भागरा 58]

11. सिद्ध करो कि उस सरल-रेखा का समीकरण, जो बिन्दु a में से हो कर जाय और समतल $r \cdot a = p$ के समानान्तर हो और रेखा $r = c + \lambda d$ पर लम्ब हो,

$$(r - a) \times (d \times n) = 0 \text{ है।}$$

12. यदि a, b, c तीन असमरेख-बिन्दुओं A, B, C के स्थिति-सदिश हों, तो सिद्ध करो कि C की $A; B$ को मिलाने वाली रेखा से दूरी

$$\frac{|a \times b + b \times c + c \times a|}{|b - a|} \text{ है।}$$

[सकेत अनुच्छेद 6. 10 का प्रयोग करो।]

13. सिद्ध करो कि रेखाएं

$$r = a + t(b \times c),$$

$$\text{और } r = b + s(c \times a),$$

एक दूसरे को काटती है यदि $a \cdot c = b \cdot c$ और उनका प्रतिच्छेद-बिन्दु भी ज्ञात करो यदि यह प्रतिबन्ध संतुष्ट हो तो।

14. सिद्ध करो कि उन सब सरल-रेखाओं के मध्य-बिन्दुओं का बिन्दु-पथ, जो दो अप्रतिच्छेदी-रेखाओं पर अवसान हो, एक समतल है जो इन दो रेखाओं के उभयनिष्ठ लम्ब को सम्ब-समद्विभाजित करता है।
15. एक इवाई घन में किसी कोने की, उसमें से न गुजरने वाले विकर्णों से सम्भवतः दूरी ज्ञात करो।

[भाग 56]

[सकेत:-विकर्ण $\vec{OP} = i + j + k$, $\vec{OB} (=j)$ का \vec{OP} पर OM प्रक्षेप $= \frac{1}{3}$, $p^2 = OB^2 - OM^2 = 2/3$.]

16. दो सरल-रेखाओं के बीच की न्यूनतम दूरी ज्ञात करो जो क्रमशः बिन्दु $A (i + 2j + 3k)$ और $B (2i + 4j + 5k)$ में से हो कर जाएं और उनकी दिशाएं $(2i + 3j + 4k)$ और $(j + 4j + 5k)$ हों। न्यूनतम दूरी का समीकरण भी ज्ञात करो।
17. समतली $r \cdot (i + 2j + 3k) = 4$, और $r \cdot (3i + j + k) = 4$, की प्रतिच्छेद-रेखा तथा $r \cdot (2i - j + 3k) = 1$, और $r \cdot (4i + j - 2k) = 2$ की प्रतिच्छेद-रेखाओं के बीच की न्यूनतम दूरी ज्ञात करो।
18. मूल-बिन्दु O के सापेक्ष, चार बिन्दुओं के स्थिति-सदिश a, b, c, d हैं। तो निम्न की ज्यामितीय व्याख्या करो:—

$$(i) (c \sim d) \times (a - b) = 0,$$

$$(ii) (c - d) (a - b) = 0,$$

19. उस बिन्दु का बिन्दु-पथ ज्ञात करो जो निम्न समतलों से समान दूरी पर हो।

$$r \cdot n_1 = q_1.$$

$$r \cdot n_2 = q_2$$

$$r \cdot n_3 = q_3.$$

[सूचना 51]

20. यदि a, b, c तीन असमतलीय-सदिश हों तो तीन समतलों $r \cdot a = 1, r \cdot b = 1, r \cdot c = 1$, का प्रतिच्छेद-बिन्दु ज्ञात करो।

[संकेत $b \times c, c \times a, a \times b$ भी असमतलीय होंगे अतः प्रतिच्छेद-बिन्दु माना $l \cdot b \times c + m \cdot c \times a + n \cdot a \times b$ है तो यह समतलों के समीकरणों को संतुष्ट करेगा $\therefore l = \frac{1}{[abc]}$ इत्यादि]

चतुष्फलक (Tetrahedron)

6.13 चतुष्फलक का आयतन। (Volume of tetrahedron)

माना OABC एक चतुष्फलक है और O के सापेक्ष A, B, C के स्थिति-सदिश क्रमशः a, b, c हैं। अर्थात्

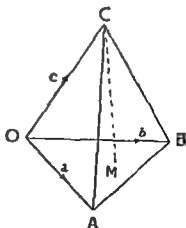
$$\vec{OA} = a, \vec{OB} = b,$$

$$\vec{OC} = c.$$

त्रिभुज OAB का सदिश-क्षेत्रफल

$$= \frac{1}{2} a \times b. \dots (1)$$

यह सदिश, समतल OAB पर लंब है



माना चतुष्फलक का आयतन V है। तो

$$V = \frac{1}{6} (\text{धोधार का क्षेत्रफल}) \times \text{लंबवत् ऊँचाई}.$$

$$= \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{2} (\vec{OA} \times \vec{OB}) \cdot \vec{OC}.$$

$$= \frac{1}{6} (a \times b) \cdot c = \frac{1}{6} [abc]. \quad \dots (2)$$

अतः चतुष्फलक का क्षेत्रफल $= \frac{1}{6}$ समान्तरफलक का क्षेत्रफल

उपप्रेमेय नं० 1. यदि चतुष्फलक के शीर्ष a, b, c, d हो तो चतुष्फलक का आयतन

$$= \frac{1}{6} [a - d, b - d, c - d]. \quad . (3)$$

(शीर्ष D को मूल-बिन्दु लेने से).

उपप्रेमेय नं० 2. प्रतिबन्ध कि चार बिन्दु a, b, c, d समतलीय हो।

$$[a - d, b - d, c - d] = 0.$$

$$\text{या } [abc] = [abd] + [adc] + [dbc] \quad . (4)$$

उपप्रेमेय नं० 3. यहि $(x_p, y_p, z_p), (p=1, 2, 3, 4)$ शीर्षों के निर्देशांक हो तो इन चार बिन्दुओं से बनाए गए चतुष्फलक का आयतन $=$

$$\frac{1}{6} \begin{vmatrix} x_1 - x_4 & y_1 - y_4 & z_1 - z_4 \\ x_2 - x_4 & y_2 - y_4 & z_2 - z_4 \\ x_3 - x_4 & y_3 - y_4 & z_3 - z_4 \end{vmatrix}$$

$$= \frac{1}{6} \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & z_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & z_3 & 1 \\ x_4 & y_4 & z_4 & 1 \end{vmatrix}$$

6.14 किसी चतुष्फलक के सम्मुख किनारों के उभयनिष्ठ अभिलम्ब की लम्बाई ज्ञात करना। (To find the length of the common perpendicular to a pair of opposite edges.)

चतुष्फलक के सम्मुख किनारे, OB और AC का विचार करो, वे क्रमशः सदिश b और $c - a$ के समान्तर हैं।

OB का सदिश समीकरण है

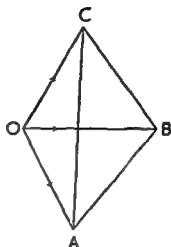
$$r = \frac{1}{2}b, \quad \dots (1)$$

धोर AC का

$$r = a + s(c-a), \quad \dots (2)$$

अतः दोनों के बीच में न्यूनतम

$$\begin{aligned} \text{दूरी} &= \frac{[a, b, c-a]}{|b \times (c-a)|} \\ &= \frac{[abc]}{|b \times (c-a)|} \quad \dots (3) \end{aligned}$$



6.15 गोले का समीकरण । equation of a sphere.)

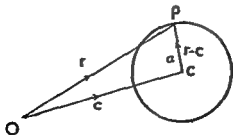
(i) उस गोले का समीकरण ज्ञात करो जिसका केन्द्र C है और त्रिज्या a है ।

[प्रायगरा 60, कलकत्ता 60]

माना मूल-बिन्दु O धोर इसके सापेक्ष केन्द्र C का स्थिति-संदिश c है ।

माना गोले पर P (=x) कोई बिन्दु है ।

$$\text{तो } \vec{CP} = r - c \quad \dots (1)$$



परन्तु CP एक त्रिज्या है । इसलिए $CP = a$.

$$\therefore CP^2 = a^2 = (r - c) \cdot (r - c).$$

$$\text{या } r^2 - 2r.c + c^2 - a^2 = 0. \quad \dots(2)$$

$c^2 - a^2 = k$ रखने पर गोले का समीकरण

$$r^2 - 2r.c + k = 0. \quad \dots(3)$$

$$\text{या } F(r) = 0.$$

चूँकि r गोले पर एक स्वेच्छेद बिन्दु है इसलिए (2) या (3) गोले का समीकरण है।

विशेष स्थिति में

(1) जबकि मूल-बिन्दु केन्द्र है तो गोले का समीकरण

$$r^2 = a^2. \quad \dots(4)$$

$$\text{क्योंकि } c = 0.$$

(2) यदि मूल-बिन्दु गोले पर स्थित हो तो $c^2 = a^2$, इसलिए गोले का समीकरण है

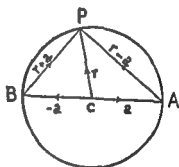
$$r^2 - 2r.c = 0. \quad \dots(5)$$

(3) ऊपर समीकरण (4) से

$$(r - a). (r + a) = 0.$$

इससे स्पष्ट है कि रेखा AP और

BP एक-दूसरे पर लम्ब हैं।



6.16 एक गोले और सरल-रेखा का प्रतिच्छेदन ज्ञात करना।

(Intersection of a line and a sphere)

माना गोले का समीकरण है

$$F(r) = r^2 - 2r.c + k = 0. \quad \dots(1)$$

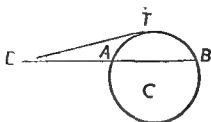
और सरल-रेखा है

$$r = d + tb. \quad \dots(2)$$

जोकि बिन्दु D ($=d$) से गुजरती है और सदिश b के समान्तर है।

b इकाई-सदिश है।

यदि रेखा (2) गोले को काटती है तो



$$(d + r)^2 - 2(d + r)b \cdot c + k = 0$$

$$\text{या } r^2 + 2b \cdot (d - c) r + (d^2 - 2d \cdot c + k) = 0.$$

$$\text{या } r^2 + 2b \cdot (d - c) r + F(d) = 0. \quad \dots(3)$$

$$\text{जबकि } F(d) = d^2 - 2d \cdot c + k.$$

समीकरण (3) r में द्विघात समीकरण है। जब: सरल-रेखा गोले को बिन्दुओं पर काटती है। समीकरण (3) में r का मान निकाल कर (2) में रखने से हम दोनों बिन्दुओं को प्राप्त कर सकते हैं। बिन्दु वास्तविक और भिन्न होंगे यदि

$$b^2 (d - c)^2 > F(d).$$

$$\text{और संपाती होंगे यदि } b^2 (d - c)^2 = F(d)$$

यदि $b^2 (d - c)^2 < F(d)$ तो बिन्दु काल्पनिक होंगे। अर्थात् रेखा गोले को नहीं काटेगी।

$$\text{और } r_1, r_2 = DA, DB = F(d)$$

जोकि b से स्वतन्त्र है। अर्थात् बिन्दु D से किसी भी रेखा के लिए यह गुणनफल एक निश्चित राशि है।

जब $r_1 = r_2$ तो दोनों बिन्दु संपाती होंगे। इस अवस्था में सरल-रेखा गोले को स्पर्श करती है। तब

$$DT^2 = DA \cdot DB = F(d). \quad (4)$$

व्यञ्जक $F(d)$, बिन्दु D की गोले $F(r) = 0$ के सापेक्ष घात (power) कहलाती है। और इसका मान $= DT^2 = CD^2 - a^2$ बिन्दु D से यदि कोई भी स्पर्श रेखा गोले को खींची जाय तो उसकी लम्बाई

$\sqrt{CD^2 - d^2}$ एक स्थिर राशि होगी। अतः यह सब स्पर्श रेखाएँ एक “स्पर्श-शंकु” (tangent cone) या “अन्वलीपी शंकु” (enveloping cone) का निर्माण करती हैं।

यदि बिन्दु D मूल-बिन्दु पर है तो इसकी घात $= F(0) = k$, है जो कि मूल-बिन्दु से गोले पर खींचे गए स्पर्शज्या के वर्ग के समान है। यदि O गोले के भीतर है तो k ऋण होगा अर्थात् O से स्पर्शज्या काल्पनिक होगा।

6.17 गोले पर स्पर्श-समतल। (Tangent-plane to the sphere.)

यदि बिन्दु D गोले पर स्थित है तो $F(d) = 0$ । समीकरण (3) अनुच्छेद 6.16 से स्पष्ट है कि एक मूल शून्य होगा। दूसरा मूल भी शून्य होगा यदि

$$b. (d - c) = 0. \quad \dots(1)$$

और यदि r , स्पर्श-रेखा पर कोई बिन्दु है तो $(r - d)$ सदिश b के समान्तर है अतः समीकरण (1) से

$$(r - d). (d - c) = 0. \quad \dots(2)$$

यह एक समतल है जो बिन्दु D में से गुजरता है और CD पर लम्ब है।

अब D में से खींची गईं सब स्पर्श-रेखाएँ समतल (2) पर स्थित हैं। अतः यह समतल गोले का “स्पर्श-समतल” (tangent-plane) कहलाता है।

चूँकि $F(d) = 0$, तो हम समीकरण (2) को इस प्रकार भी लिख सकते हैं

$$r.d - d^2 - c. (r - d) + d^2 - 2c.d + k = 0.$$

$$\text{या } r.d - c. (r + d) + k = 0. \quad \dots(3)$$

समीकरण (3) गोले पर एक स्पर्श-समतल का मानक (standard) रूप है।

6.18 वह प्रतिबन्ध ज्ञात करो कि समतल $r.n = p$, गोले $F(r) = 0$ को स्पर्श करे। (Find the condition that a given plane should touch the sphere)

गोले का समीकरण है।

$$F(r) = 0. \text{ या } r^2 - 2r \cdot c + k = 0. \quad \dots (1)$$

समतल का समीकरण है

$$r \cdot n = p. \quad \dots (2)$$

यदि समतल (2), गोले (1) को स्पर्श करता है तो इस पर केन्द्र से लम्ब गोले की त्रिज्या के बराबर होगा। अर्थात्

$$\left(\frac{p - c \cdot n}{n} \right)^2 = a^2 = c^2 k. \quad \dots (3)$$

6.19 प्रतिबन्ध, यदि दो गोले एक-दूसरे को समकोण पर काटें। (Condition that two spheres cut each other orthogonally)

$$\text{माना } r^2 - 2r \cdot c + k = 0. \quad \dots (1)$$

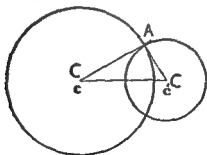
$$\text{और } r^2 - 2r \cdot c' + k' = 0 \quad \dots (2)$$

एक-दूसरे को समकोण पर काटते हैं।

$$\text{तो सिद्ध करना है कि } 2c \cdot c' = k + k'. \quad (3)$$

यदि दो गोले एक-दूसरे को सम्बन्धित काटते हैं तो प्रतिच्छेद-बिन्दु पर एक गोले का स्पर्श समतल दूसरे गोले के केन्द्र में से गुजरता है। अतः दोनों गोलों के केन्द्रों की दूरी का वर्ग उनकी त्रिज्याओं के वर्गों के योग के बराबर है। अर्थात्

$$(c - c')^2 = (CA)^2 + (C'A)^2$$



$$\text{या } (c - c')^2 = a^2 + a'^2,$$

$$\text{या } c'^2 + c^2 - 2c \cdot c' = c^2 - k + c'^2 - k',$$

$$\text{या } 2c \cdot c' = k + k'. \quad \dots (4)$$

6.20 ध्रुवीय-समतल/(Polar plane).

किसी बिन्दु का एक गोले के सापेक्ष ध्रुवीय-समतल उन बिन्दुओं का बिन्दु-पथ है जिन पर स्पर्श-समतल दिए हुए बिन्दु में से गुजरते हैं।

माना गोले का समीकरण है

$$r^2 - 2r \cdot c + k = 0. \quad \dots (1)$$

बिन्दु d पर स्पर्श-समतल है

$$r \cdot d - c \cdot (r + d) + k = 0. \quad \dots (2)$$

माना दिया हुआ बिन्दु $P (=h)$ है।

तो समतल (2) P में से गुजरता है।

$$\therefore h \cdot d - c \cdot (h + d) + k = 0. \quad \dots (3)$$

अतः d का बिन्दु-पथ है

$$r \cdot h - c \cdot (h + r) + k = 0. \quad \dots (4)$$

यह अभीष्ट ध्रुवीय-समतल का समीकरण है।

समीकरण (4) को हम इस प्रकार से भी लिख सकते हैं—

$$r \cdot (h - c) = (c \cdot h - k). \quad \dots (5)$$

(5) से स्पष्ट है कि ध्रुवीय-समतल केन्द्र और बिन्दु h को मिलाने वाली रेखा पर लम्ब होती है।

ध्रुवीय-समतल ज्ञात करने की सरल विधि :—

यदि बिन्दु h है तो गोले के समीकरण में r^2 के स्थान पर

$r \cdot h$ और $2r$ के स्थान पर $(r + h)$ लिख दें।

उदाहरण 1

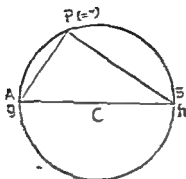
उस गोले का समीकरण ज्ञात करो जिसके व्यास के दो सिरे g और h हैं।

[ब० हि० वि० 54]

माना गोले पर कोई बिन्दु $P (=r)$ है। और गोले का केन्द्र C है, तथा A और B इसके व्यास के दो सिरे हैं जिनके स्थिति-सदिश क्रमशः A और B हैं।

$$\vec{AP} = \vec{r} - \vec{g}. \quad (1)$$

$$\vec{BP} = r - b \quad \dots(2)$$



चूँकि AB व्यास है इसलिए $\angle APB$ एक समकोण है। इसलिए,
 $(r - a) \cdot (r - b) = 0$... (3)

यह गोले की कसौटी समीकरण है।

उदाहरण 2

उस गोले के केन्द्र के निर्देशांक ज्ञात करें जो निम्न चार समतलों द्वारा निर्माण किए गए चतुष्फलक के अन्तर्गत है।

$$xj = 0, xj = 0, xk = 0.$$

$$\text{और } x(i + j + k) = 0$$

गोले का समीकरण भी ज्ञात करें।

[उ० द्वि० वि० 53, प्रश्न 54, 56]

माना गोले का केन्द्र

$$c = xi + yj + zk \text{ है।} \quad \dots(1)$$

चूँकि गोला चतुष्फलक का अन्तर्गत है इसलिए, यह चारों समतलों को स्पर्श करता है। अतः केन्द्र से उन पर लम्ब प्रिज्मा के दूरीएँ हैं।

$$\therefore \frac{cj}{1} = x = \frac{cj}{1} = y = \frac{ck}{1} = z = \frac{x - c \cdot (i + j + k)}{\sqrt{3}}$$

= f. (माना)

$$\text{या } cx = cj = ck = f. \quad \dots(2)$$

$$\text{और } \frac{a-3p}{\sqrt{3}} = p.$$

$$\text{या } p(\sqrt{3} \div 3) = a.$$

$$\text{या } p = \frac{a}{3 \div \sqrt{3}} = \frac{a(3-\sqrt{3})}{6} \quad \dots(3)$$

$$\therefore x=y=z = \frac{a(3-\sqrt{3})}{6}.$$

अतः गोले का केन्द्र

$$c = \frac{a}{6} (3 - \sqrt{3}) (i + j + k). \quad \dots(4)$$

गोले का समीकरण है

$$(r - c)^2 = a^2. \quad \dots(5)$$

उदाहरण 3.

सिद्ध करो कि निम्न समष्टियों द्वारा बनाए गए अनुच्छेदक का घासन

$$\frac{2p^2}{3mn} \text{ है।}$$

$$r. (mj \div rk) = 0.$$

$$r. (rk \div li) = 0.$$

$$r. (li \div mj) = 0.$$

$$\text{और } r. (li \div mj \div rk) = p.$$

[आमरा 45, 59, सत्यन 52, 58, बनारस 54, 56, 58]

हम पहले अनुच्छेदक के शीर्ष ज्ञात करते हैं। समष्टियों के समीकरण हैं

$$r. (mj \div rk) = 0. \quad \dots(1)$$

$$r. (rk \div li) = 0. \quad \dots(2)$$

$$r. (li \div mj) = 0. \quad \dots(3)$$

$$\text{और } r. (li \div mj \div rk) = p. \quad \dots(4)$$

(1), (2) और (3) दूसर-द्विन्दु में से गुजरते हैं।

(1), (2) और (4) से

$$r. li = p.$$

$$\text{या } r.i = p/l \quad \dots(5)$$

$$\text{इसी प्रकार } r.j = p/m. \quad \dots(6)$$

(4) में (5) और (6) से मान रखने पर

$$p + p + r.nk = p.$$

$$\text{या } r.k = -p/n. \quad \dots(7)$$

अतः (1), (2) और (4) का प्रतिच्छेद—बिन्दु $A(=a)$

$$= \left(\frac{p}{l} i + \frac{p}{m} j - \frac{p}{n} k \right) \quad \dots(8)$$

इसी प्रकार (1), (3) और (4) से तथा (2), (3), (4) से हम दूसरे दो शीर्ष

$$B(=b) = \left(\frac{p}{l} i - \frac{p}{m} j + \frac{p}{n} k \right). \quad \dots(9)$$

$$\text{और } C(=c) = \left(-\frac{p}{l} i + \frac{p}{m} j + \frac{p}{n} k \right) \quad \dots(10)$$

प्राप्त कर सकते हैं।

अतः चतुष्फलक का आयतन

$$= \frac{1}{6} [abc] = \frac{1}{6} \begin{vmatrix} p/l & p/m & -p/n \\ p/l & -p/m & p/n \\ -p/l & p/m & p/n \end{vmatrix}.$$

$$= \frac{1}{6} \frac{p^3}{lmn} \begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{vmatrix}.$$

$$= \frac{2}{3} \frac{p^3}{lmn}.$$

उदाहरण 4

यदि बिन्दु O से खींची गई सरल-रेखा किसी गोले को काटती है तो सिद्ध करो कि गोले की पृष्ठ और O का गोले के सापेक्ष ध्रुवीय समतल, इस रेखा को हरात्मकतः (harmonically) बाटते हैं।

[आपरा 53, 60, 66, 67]

माना O मूल-बिन्दु है और गोले का समीकरण

$$r^2 - 2r.c + k = 0, \text{ है।} \quad \dots(1)$$

O की (1) के सापेक्ष घूर्णीय-समतल बराबर है

$$r.O - c (r + O) + k = 0.$$

$$\text{या } r.c = k. \quad (2)$$

माना O मे से सरल-रेखा है

$$r = t.b. \quad \dots(3)$$

जबकि b इकाई सदिश है।

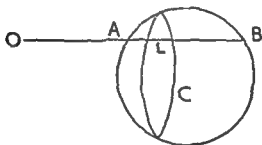
माना रेखा (3) गोले (1) को बिन्दु A और B पर काटती है। तो

$$t^2 - 2t(b.c) + k = 0. \quad \dots(4)$$

माना समीकरण (4) के दो मूल t_1 और t_2 हैं।

$$\text{तो } t_1 + t_2 = OA + OB.$$

$$= 2b.c \quad \dots(5)$$



और

$$OA.OB = t_1.t_2 = k \quad \dots(6)$$

(5) और (6) से

$$\frac{1}{OA} + \frac{1}{OB} = \frac{2.b.c}{k}. \quad \dots(7)$$

माना (2) और (3) का प्रतिच्छेद-बिन्दु L है।

$$\text{तो } t.b.c = k.$$

$$\text{या } t = \frac{k}{b.c} = OL. \quad \dots(8)$$

(7) और (8) से

$$\frac{1}{OA} + \frac{1}{OB} = \frac{2}{OL} \quad \dots(9)$$

(9) से स्पष्ट है कि OA, OL, और OB हरात्मक श्रेणी में हैं।

प्रश्नावली 12

1. सिद्ध करो कि अर्ध-वृत्त में समकोण होता है। [भागरा 67]
और यह भी सिद्ध करो कि एक गोले का व्यास इसकी पृष्ठ पर सम-कोण अंतरित करता है। [भागरा 65]
2. चतुर्फलक के आयतन V के लिए निम्न सूत्र सिद्ध करो, जबकि a, b, c तीन सगामी बिन्दु हैं और θ , ϕ , ψ परस्पर उनके बीच के कोण हैं।

$$V^2 = \frac{a^2 b^2 c^2}{36} \begin{vmatrix} 1 & \cos\phi & \cos\psi \\ \cos\phi & 1 & \cos\theta \\ \cos\psi & \cos\theta & 1 \end{vmatrix}$$

[भागरा 57, सन्निक 55, पञ्चाव 58]

[संकेत $a \times b = ab \cos\psi$ इत्यादि/और

$$[l \ m \ n] [a \ b \ c] = \begin{vmatrix} a.l & a.m & a.n \\ b.l & b.m & b.n \\ c.l & c.m & c.n \end{vmatrix} \text{ इत्यादि.... 1]$$

3. एक स्थिर बिन्दु (a, b, c) में से होकर जाने वाले समतल निर्देशांक-प्रक्षेपों को A, B, C पर काटते हैं। तो सिद्ध करो कि O, A, B, C में से गुजरने वाले गोले के केन्द्र का बिन्दु-पथ

$$\frac{a}{x} + \frac{b}{y} + \frac{c}{z} = 2 \text{ है।}$$

4. सिद्ध करो कि जो गोला, गोले $F'(x) = 0$ और $F(x) = 0$ को सम-कोण पर काटता है, वह गोले $F(x) - \lambda F'(x) = 0$ को भी समकोण

पर काटता है।

5. सिद्ध करो चतुष्फलक का प्रत्येक तल केन्द्रक पर समान मापतन प्रतारित करता है।

[सकेत केन्द्रक को मूल-बिन्दु मानो, तो $a + b + c + d = 0 \dots$]

6. एक दिए हुए बिन्दु O से, किसी स्थिर गोले तक एक सरल-रेखा OP खींची गई है। OP पर बिन्दु Q इस प्रकार से स्थित किया गया है कि अनुपात $OP : OQ$ एक निश्चित अंक है। सिद्ध करो कि Q को बिन्दु-पथ एक गोला है।

7. सिद्ध करो कि गोले $F(r) = 0$, और $F'(r) = 0$, का मूल-समतल (Radical plane)

$$2r.(c - c') = k - k' \text{ है।}$$

8. उस गोले का समीकरण ज्ञात करो जो निम्न चार समतलों द्वारा बनाए गए चतुष्फलक का परिगत हो।

$$r.l = r.j = r.k = 0.$$

$$\text{और } r.(i + j + k) = a.$$

9. सिद्ध करो कि उस चतुष्फलक का मापतन, जिसका शीर्ष (x, y, z) है और आधार, बिन्दुओं $(a, 0, 0)$, $(0, b, 0)$ और $(0, 0, c)$ से बनाया हुआ त्रिभुज है,

[आगरा एम० एससी० 47]

$$\frac{1}{6} abc \left(\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} - 1 \right) \text{ है, जबकि निर्देशांक-प्रक्ष}$$

सम्कोणीय हैं।

(सकेत चार शीर्ष ai, bj, ck और $(xi + yj + zk)$ हैं।)

10. सिद्ध करो कि बिन्दु A, जिसका स्थिति-सदिश a है उसको बिन्दुओं b, c, d में होकर जाने वाले समतल से सम्भवतः दूरी

$$\frac{[bcd] + [cad] + [abd] - [abc]}{|b \times c + c \times d + d \times b|} \text{ है।}$$

11. सिद्ध करो कि चार बिन्दु जिनके स्थिति-सदिश a, b, c, d हैं; उनमें से हो कर जाने वाले गोले का केन्द्र एक ऐसा बिन्दु है जो निम्न तीन समतलों पर स्थित है।

$$\{r - \frac{1}{2}(a+b)\} \cdot (a-b) = 0,$$

$$\{r - \frac{1}{2}(b+c)\} \cdot (b-c) = 0,$$

$$\{r - \frac{1}{2}(c+a)\} \cdot (c-a) = 0,$$



सदिशों का अवकलन और समाकलन

7.1 परिचय

इस अध्याय में हम सदिशों का केवल किसी अदिश-स्वतंत्र-चर के सापेक्ष अवकलन और समाकलन की व्याख्या करेंगे। आंशिक अवकलन (Partial differentiation) इस पुस्तक के विषय क्षेत्र से बाहर है।

7.2 किसी सदिश का अवकलज (Derivative of a Vector)

माना एक सदिश \mathbf{r} किसी अदिश-राशि t का सतत (Continuous) और एकमान-फलन (Single valued function) है। तब t के प्रत्येक मान के अनुरूप \mathbf{r} का एक ही मान है। जैसे ही t सतत विचरण करता है तदनुसार \mathbf{r} भी ऐसे ही विचरण करता है। माना समय t पर सदिश \mathbf{r} को, O के सापेक्ष बिन्दु P के स्थिति-मदिश, द्वारा अभिव्यक्त किया जाता है। जैसे t में परिवर्तन होता है तदनुसार \mathbf{r} में भी इस प्रकार से परिवर्तन होता है कि इसका अंतिम सिरा अवकाश में एक वक्र बनाता है। t में δ_t की वृद्धि, \mathbf{r} में δ_r की वृद्धि उत्पन्न करती है। अतः अदिश के मान $t + \delta_t$ के अनुरूप सदिश का मान $\mathbf{r} + \delta_r$ । नया सदिश-त्रिज्या (radius vector) OP' है।

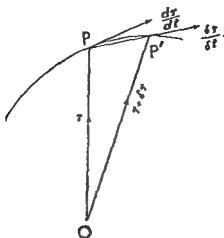
वृद्धि δ_r - सदिश PP'

$$(\because \vec{OP} - \vec{OP} = \vec{PP'}) \text{ अनुपात } \frac{\delta_r}{\delta_t}$$

एक सदिश है जोकि जीवा PP' से समरेख है; परन्तु परिमाण में PP' का $\frac{1}{\delta_t}$ गुना है।

ज्यों-ज्यों δ_t शून्य की ओर प्रवृत्त होता है त्यों-त्यों P' , P की ओर उस पर संपाती होने के लिए सरकता है। जीवा PP' बिन्दु P पर स्पर्श,

रेखा बन जायगी। जैसे ही δt शून्य की ओर प्रवृत्त होता है तो भागफल



$\frac{\delta r}{\delta t}$ का सीमात-मान एक सदिश है जिसकी दिशा, P पर खींची गई स्पर्श-रेखा की दिशा है, जिस ओर t बढ़ता है।

यदि अनुपात $\frac{\delta r}{\delta t}$ के सीमान्त-मान (limiting value) का अस्तित्व है तो इसको $\frac{dr}{dt}$ से चिह्नित किया जाता है। और यह r या t के सापेक्ष अवकलन-गुणांक (differential co-efficient) या अवकलज (derivative) कहलाता है। अतः

$$\text{Lt } \delta t \rightarrow 0 \quad \frac{\delta r}{\delta t} = \frac{dr}{dt} \quad \dots \dots (1)$$

जब इस सीमा का अस्तित्व होता है तो फलन r , t के सापेक्ष अवकलनीय-फलन (differentiable-function) कहलाता है। अवकलजों के प्राप्त करने की विधि को अवकलन (differentiation) कहते हैं।

सामान्य रूप से $\frac{dr}{dt}$ स्वयं t का फलन होगा और यदि इसने अवकलज का अस्तित्व है तो उसको $\frac{d^2r}{dt^2}$ से अभिव्यक्त करते हैं और यह r का द्वितीय-अवकलन-गुणांक (second-differential Co-efficient)

कहलता है। इसी प्रकार $\frac{d^2r}{dt^2}$ का अवकलन $\frac{d^3r}{dt^3}$, r का तृतीय अवकलन है। इत्यादि.....।

यान्त्रिकी (mechanics) में समय के सापेक्ष अवकलन, अवकलित-राशि (quantity differentiated) के ऊपर बिन्दु (dot) द्वारा भी अभिव्यक्त किया जाता है। अतः $r, \dot{r}, \ddot{r}, \dots$ से अभिप्राय $\frac{dr}{dt}, \frac{d^2r}{dt^2}, \dots$ है।

7.3 तात्कालिक वेग और त्वरण (Instantaneous velocity and acceleration)

माना कोई गतिमान कण, मूल बिन्दु O के सापेक्ष t समय पर P पर है, और बिन्दु P का, स्थिति-सदिश r है। और $t + \delta t$ समय पर वह निकटवर्ती बिन्दु P' पर है, और $OP' = r + \delta r$, अतः δt कालान्तर में विस्थापन $\vec{PP'}$ है।

$$\vec{PP'} = \vec{OP'} - \vec{OP} = r + \delta r - r = \delta r, \quad \dots \dots (1)$$

इसलिए $\frac{\delta r}{\delta t}$ इस कालान्तर में औसत वेग अभिव्यक्त करता है। जब $\delta t \rightarrow 0$, औसत वेग का सीमांत-मान, कण का तात्कालिक वेग होता है। अतः तात्कालिक वेग का अभिव्यक्त करने वाला सदिश

$$V = \frac{dr}{dt}, \quad \dots \dots (1)$$

यह कण के बिन्दु पथ को P पर स्पर्श-रेखा की दिशा में सदिश है।

इसी प्रकार यदि सदिश-वेग V में वृद्धि δv , कालान्तर δt में हो, तो भागफल $\frac{\delta v}{\delta t}$ इस कालान्तर δt में औसत त्वरण अभिव्यक्त करेगा। अतः कण का तात्कालिक त्वरण इस औसत त्वरण का सीमांत-मान है जब $\delta t \rightarrow 0$, अतः

$$\text{सदिश } a = \frac{dv}{dt} = \frac{d^2r}{dt^2}, \quad \dots \dots (3)$$

गतिमान कण का तात्कालिक त्वरण अभिव्यक्त करता है।

7.4 कुछ मानक रूपों का अवकलन (Differentiation of some standard forms)

7.4 (1) अवर्तसदिश का अवकलन

माना c एक अवर्त सदिश है। तो t में δ_t की वृद्धि से c में कोई परिवर्तन नहीं होता अर्थात् $\delta_c = 0$ । तब

$$\frac{dc}{dt} = \lim_{\delta_t \rightarrow 0} \frac{\delta_c}{\delta_t} = 0 \quad \dots\dots(1)$$

अतः किसी अवर्त सदिश c का अवकलन शून्य होता है।

7.4 (2) सदिशों के योग का अवकलन (Derivative of a sum.)

माना r और s दो अवकलनीय-सदिश, t के फलन हैं। और t में δ_t की वृद्धि के कारण इन में वृद्धियाँ क्रमशः δ_r और δ_s हैं। तो

$$\begin{aligned} \delta(r+s) &= (r+\delta_r + s+\delta_s) - (r+s) \\ &= \delta_r + \delta_s. \end{aligned}$$

∴ भागफल

$$\frac{\delta(r+s)}{\delta_t} = \frac{\delta_r}{\delta_t} + \frac{\delta_s}{\delta_t}.$$

जैसे $\delta_t \rightarrow 0$ दोनों ओर सीमाना-मान लेने पर

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{\delta(r+s)}{\delta_t} = \lim_{\delta_t \rightarrow 0} \left(\frac{\delta_r}{\delta_t} + \frac{\delta_s}{\delta_t} \right).$$

$$\text{या } \frac{d(r+s)}{dt} = \frac{dr}{dt} + \frac{ds}{dt}. \quad \dots\dots(2)$$

अर्थात् दो या अधिक सदिशों के योग का अवकलन = उनके अवकलनों के योग के।

7.4 (3) फलन के फलन का अवकलन (Derivative of function of a function)

माना r एक सदिश-चर s का अवकलनीय-फलन है। और s एक दूसरे चर t का अवकलनीय-फलन है। तो t में δ_t की वृद्धि, s और r में δ_s और δ_r की वृद्धि उत्पन्न करती है। और δ_s , δ_r और δ_t के साथ शून्य की ओर प्रवृत्त होते हैं।

बीज्यो-सर्वसमिका (algebraic identity) से

$$\frac{\delta_r}{\delta_1} = \frac{\delta_r}{\delta_1} + \frac{\delta_2}{\delta_1}$$

जैसे $\delta_1 \rightarrow 0$ दोनों घोर सीमान्त-मान लेने से हमें प्राप्त है ।

$$\frac{dr}{dt} = \frac{dr}{ds} \cdot \frac{ds}{dt} \quad \dots \dots (3)$$

7.4 (4) यदि s और सदिश r के गुणनफल का अवकलन ।
(Derivative of the product of a vector r and scalar s)

माना s और r क्रमशः t के यदि s और सदिश r अवकलनीय-फलन है और t में वृद्धि δ_1 के अनुसार s और r में वृद्धि δ_s और δ_r है । तो

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}(s r) &= \lim_{\delta_1 \rightarrow 0} \frac{[(s + \delta_s)(r + \delta_r) - s r]}{\delta_1} \\ &= \lim_{\delta_1 \rightarrow 0} \frac{(r \delta_s + s \delta_r + \delta_r \delta_s)}{\delta_1} \\ &= \lim_{\delta_1 \rightarrow 0} \left(r \frac{\delta_s}{\delta_1} + s \frac{\delta_r}{\delta_1} + sr \frac{\delta_s}{\delta_1} \right) \end{aligned}$$

$\therefore \delta_s$ और δ_r शून्य की ओर प्रवृत्त होते हैं जैसे ही $\delta_1 \rightarrow 0$.

$$\therefore \lim_{\delta_1 \rightarrow 0} \delta_r \cdot \frac{\delta_s}{\delta_1} = 0.$$

$$\text{अतः } \frac{d}{dt}(s r) = r \frac{ds}{dt} + s \frac{dr}{dt} \quad \dots \dots (4)$$

7.4 (5) सदिशों के सदिश-गुणनफल और सदिश-गुणनफल का अवकलन (Derivative of scalar and cross products of vectors)

माना a और b सदिश-चर t के दो अवकलनीय-सदिश हैं । तो

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}(a \cdot b) &= \lim_{\delta_1 \rightarrow 0} \frac{(a + \delta a) \cdot (b + \delta b) - (a \cdot b)}{\delta_1} \\ &= \lim_{\delta_1 \rightarrow 0} \left(b \frac{\delta a}{\delta_1} + a \frac{\delta b}{\delta_1} + \delta a \frac{\delta b}{\delta_1} \right) \end{aligned}$$

$$= b \cdot \frac{da}{dt} + a \cdot \frac{db}{dt} \quad \text{--- (5)}$$

इन्हीं प्रकार

$$\frac{d}{dt}(a \times b) = \frac{da}{dt} \times b + a \times \frac{db}{dt} \quad \text{--- (6)}$$

(पृष्ठ 1971)

नोट—(6) में किन्हीं भी पद में दुरुन-खण्डों के क्रम में परिवर्तन करने से कुछ बदल जाता है।

$$\begin{aligned} \text{और} \quad \frac{d}{dt}[a \cdot b \cdot c] &= \frac{d}{dt}[a \cdot b \times c] \\ &= a \cdot b \times \frac{dc}{dt} + a \cdot \frac{db}{dt} \times c + \frac{da}{dt} \cdot b \times c \\ &= \left(\frac{da}{dt} \cdot b \cdot c \right) + \left(a \cdot \frac{db}{dt} \cdot c \right) + \left(a \cdot b \cdot \frac{dc}{dt} \right) \quad \text{--- (7)} \end{aligned}$$

और

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}(a \times b \times c) &= \frac{da}{dt} \times (b \times c) + a \times \left(\frac{db}{dt} \times c \right) + a \times \\ &\quad \left(b \times \frac{dc}{dt} \right) \quad \text{--- (8)} \end{aligned}$$

नोट—(8) में दुरुन खण्डों के क्रम को बनाए रखा है और (7) में प्रत्येक पद में उचित क्रम को।

नोट—यह सादर रहे कि $r \cdot \frac{dr}{dt}$ पर लब्ध होता है। अतः यदि r इकाई

$$\text{मदिम हो तो} \quad \left| r \times \frac{dr}{dt} \right| = |r| \left| \frac{dr}{dt} \right| \sin 90^\circ = \left| \frac{dr}{dt} \right| \quad \text{--- (9)}$$

(पृष्ठ 1972)

7.5 अवलोकन विविध स्थिति में (Particular cases of differentiation.)

(i) ऊपर (7.45) में उल्लेखित (5) में यदि $a = b$ हो

$$\frac{d}{dt}(a \cdot a) = 2a \frac{da}{dt}$$

$$\text{या } \frac{d}{dt}(a^2) = 2a \cdot \frac{da}{dt}.$$

यदि सदिश \mathbf{a} का मापांक a है तो $a^2 = \mathbf{a} \cdot \mathbf{a}$, और

$$\frac{d}{dt}(a^2) = 2a \frac{da}{dt}.$$

$$\text{अतः } a \cdot \frac{da}{dt} = a \frac{da}{dt}. \quad \dots\dots(1)$$

(ii) यदि सदिश \mathbf{a} की लम्बाई अचर है और \mathbf{a} के बराबर है तथा $b = \mathbf{a}$, तो

$$\frac{d}{dt}(\mathbf{a} \cdot \mathbf{a}) = 2\mathbf{a} \frac{d\mathbf{a}}{dt} = 2\mathbf{a} \frac{d\mathbf{a}}{dt} = 0. \quad \dots\dots(2)$$

$$\text{अतः } \mathbf{a} \cdot \frac{d\mathbf{a}}{dt} = 0. \quad \dots\dots(3)$$

(3) से स्पष्ट है कि एक सदिश जिसकी लम्बाई अचर है उसका अवकलज उस पर लम्ब होता है।

(iii) (7.45) (6) में यदि $b = \frac{da}{dt}$, तो

$$\frac{d}{dt} \left(a \times \frac{da}{dt} \right) = a \times \frac{d^2a}{dt^2}. \quad (\text{राज० 1971})$$

$$(\text{क्योंकि } \frac{da}{dt} \times \frac{da}{dt} = 0. \quad (\text{राज० 1971}))$$

7.6 सदिश \mathbf{r} के अवकलज का कार्तीय तुल्यांक (Cartesian equivalent of derivative of a Vector \mathbf{r})

माना सदिश \mathbf{r} को, निर्देशक-अक्षों के समानान्तर इकाई सदिशों $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$ के पदों में निम्न रूप में अभिव्यक्त किया गया है।

$$\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}. \quad \dots\dots(1)$$

जबकि x, y, z सदिश \mathbf{r} के फलन है।

जहाँ \mathbf{r} बदल कर $\mathbf{r} + \delta\mathbf{r}$ हो जाता है। माना तब $\mathbf{r}, x, y, z,$

क्रमशः $\mathbf{r} + \delta\mathbf{r}, x + \delta x, y + \delta y,$ और $z + \delta z$ में परिवर्तित होते हैं। तो

सदिश विश्लेषण

$$\mathbf{r} + \delta \mathbf{r} = (x + \delta_x)\mathbf{i} + (y + \delta_y)\mathbf{j} + (z + \delta_z)\mathbf{k}. \quad \dots\dots(2)$$

$$\text{या } \delta \mathbf{r} = \delta_x \mathbf{i} + \delta_y \mathbf{j} + \delta_z \mathbf{k}.$$

$$\therefore \frac{\delta \mathbf{r}}{\delta t} = \frac{\delta_x}{\delta t} \mathbf{i} + \frac{\delta_y}{\delta t} \mathbf{j} + \frac{\delta_z}{\delta t} \mathbf{k}.$$

जब $\delta t \rightarrow 0$ तो

$$\frac{d\mathbf{r}}{dt} = \frac{dx}{dt} \mathbf{i} + \frac{dy}{dt} \mathbf{j} + \frac{dz}{dt} \mathbf{k}. \quad \dots\dots(3)$$

अतः सदिश \mathbf{r} के प्रथम अवकलज के घटक, \mathbf{r} के घटकों के अवकलज ही हैं।

हम ऊपर परसाम (3) का n -वें अवकलज तक विस्तार कर सकते हैं। अर्थात्

$$\frac{d^n \mathbf{r}}{dt^n} = \frac{d^n x}{dt^n} \mathbf{i} + \frac{d^n y}{dt^n} \mathbf{j} + \frac{d^n z}{dt^n} \mathbf{k} \quad \dots\dots\dots(4)$$

7.7 समाकलन (Integration)

समाकलन, अवकलन की प्रतिवर्ती विधि है। यदि हमें एक सदिश-फलन \mathbf{r} दिया हुआ है तो एक और ऐसे फलन की ज्ञात करने की विधि कि

$$\frac{d\mathbf{F}}{dt} = \mathbf{r},$$

समाकलन कहलाती है। और \mathbf{F} , यदि इसका अस्तित्व है तो, \mathbf{r} का t के सापेक्ष समाकलन (integral) कहलाता है। और इसको निम्न रूप से भी लिखा जाता है।

$$\mathbf{F} = \int \mathbf{r} dt.$$

फलन \mathbf{r} समाकल्य (integrand) कहलाता है। \int समाकलन का चर है और dt समाकलन का विह्व है।

$$\text{यदि } \frac{d\mathbf{F}}{dt} = \mathbf{r} \quad \dots\dots (1)$$

और c एक स्वेच्छ अचर सदिश है, तब

$$\frac{d}{dt} (\mathbf{F} + c) = \mathbf{r}. \quad \dots\dots(2)$$

$$\therefore \int \mathbf{r} dt = \mathbf{F}, \text{ या } = \mathbf{F} + c. \quad \dots\dots(3)$$

(3) से स्पष्ट है कि समाकल F एक स्वेच्छ अचर-सदिश की-सोमा तक अनिश्चित है। इस कारण F अनिश्चित समाकल (indefinite integral) कहलाता है और \equiv समाकलन का स्थिरांक है।

7.8 कुछ मानक परिणाम (Some standard results) ऊपर अवकलन में प्राप्त किये गए परिणामों का उपयोग करके हम समाकलन के निम्न परिणाम प्राप्त करते हैं जोकि बहुत उपयोगी होंगे।

$$(i) \int \left(r \cdot \frac{ds}{dt} + s \cdot \frac{dr}{dt} \right) dt = r \cdot s + c.$$

$$(ii) \int 2 r \cdot \frac{dr}{dt} dt = r^2 + c.$$

$$(iii) \int 2 \frac{dr}{dt} \cdot \frac{d^2 r}{dt^2} dt = \left(\frac{dr}{dt} \right)^2 + c$$

$$(iv) \int r \times \frac{d^2 r}{dt^2} dt = r \times \frac{dr}{dt} + \vec{c}.$$

$$(v) \int \left(\frac{1}{r} \frac{dr}{dt} - \frac{r}{r^2} \cdot \frac{dr}{dt} \right) dt = \frac{r}{r} + \vec{c}$$

(vi) यदि a एक अचर-सदिश है तो

$$\int a \times \frac{dr}{dt} dt = a \times r + \vec{c}$$

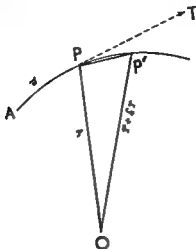
नोट—समाकलन का स्थिरांक उसी प्रकृति का होता है जिस प्रकृति का समाकल्य (integrand) हो। अतः ऊपर (i), (ii), और (iii) में स्थिरांक c

सदिश-राशि, और (iv), (v) और (vi) में \equiv सदिश हैं।

7.9 किसी वक्र पर एक दिए हुए बिन्दु पर स्पर्श-रेखा ज्ञात करना
(Tangent at a given point on a curve)

माना P किसी वक्र पर एक अचर बिन्दु है और वक्र पर एक स्थिर-बिन्दु A से मापने से चाप $AP = s$.

माना मूल बिन्दु O के सापेक्ष P का स्थिति सदिश \mathbf{r} है। और s चाप AP का फलन है। माना P और P' दो निकटवर्ती बिन्दु हैं जिनके स्थिति-सदिश



क्रमशः \mathbf{r} और $\mathbf{r} + \delta \mathbf{r}$ है। और तदनुसार चाप $AP = s$, और $AP' = s + \delta s$

$$\overrightarrow{PP} = \delta \mathbf{r}. \quad \dots(1)$$

भागफल $\frac{\delta \mathbf{r}}{\delta s}$ एक सदिश है जोकि $\delta \mathbf{r}$ के समानान्तर है।

अन्त में जब बिन्दु P' , P की ओर इस पर संपाती होने के लिए बढ़ता है तो जीवा PP' , P पर स्पर्श-रेखा बनती है। और इस स्पर्श-रेखा की दिशा $\delta \mathbf{r}$ की दिशा है।

$\frac{\delta \mathbf{r}}{\delta s}$ का सीमांत मान $= 1$.

$$\text{अतः } \frac{d\mathbf{r}}{ds} = \lim_{\delta s \rightarrow 0} \frac{\delta \mathbf{r}}{\delta s} = \overrightarrow{t} \text{ (माना)} \quad \dots(2)$$

\rightarrow

\mathbf{t} , बिन्दु P पर स्पर्श-रेखा की दिशा में इकाई सदिश है।

इसको इकाई स्पर्श-रेखा कहते हैं।

यदि O में से खींचे गए निर्देशक-प्रक्षो के सापेक्ष बिन्दु P के निर्देशांक (x, y, z) है। तो

$$\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}. \quad \dots(3)$$

$$\text{घोर } \frac{d\mathbf{r}}{dt} = \frac{dx}{dt} \mathbf{i} + \frac{dy}{dt} \mathbf{j} + \frac{dz}{dt} \mathbf{k}. \quad \dots(4)$$

अतः $\frac{d\mathbf{r}}{dt}$ के दिक्कोण

$$\frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}, \frac{dz}{dt} \text{ है।}$$

यदि स्पर्श-रेखा PT पर किसी बिन्दु का स्थिति-सदिश \mathbf{R} है तो स्पर्श-रेखा का समीकरण है।

$$\mathbf{R} = \mathbf{r} + u \mathbf{i}. \quad \dots(5)$$

जबकि u एक अदिश-चर राशि है जोकि धन या ऋण है।

P में से होकर जाने वाला और P पर स्पर्श-रेखा के लम्ब समतल

P बिन्दु पर अभिलम्ब समतल (normal plane) कहलाता है।

इसका समीकरण।

$$(\mathbf{R} - \mathbf{r}) \cdot \frac{d\mathbf{r}}{dt} = 0 \text{ है।} \quad \dots(6)$$

इस समतल में, P में से होकर जाने वाली कोई भी सरल रेखा वक्र को P पर अभिलम्ब होती है।

उदाहरण।

$r^2\mathbf{r} + (\mathbf{a} \cdot \mathbf{r}) \mathbf{b}$ का अवकलन करो।

जबकि \mathbf{a} और \mathbf{b} दो अचर-सदिश है और सदिश \mathbf{r} का मापांक r है, और यह t का फलन है।

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left\{ r^2\mathbf{r} + (\mathbf{a} \cdot \mathbf{r}) \mathbf{b} \right\} \\ = \frac{d}{dt} (r^2\mathbf{r}) + \frac{d}{dt} \{ (\mathbf{a} \cdot \mathbf{r}) \mathbf{b} \} \end{aligned}$$

$$= 2r \frac{dr}{dt} r + r^2 \frac{dr}{dt} + (a \cdot r) \frac{db}{dt} +$$

$$\left(a \frac{dr}{dt} + \frac{da}{dt} \cdot r \right) b.$$

$$\text{परन्तु } \frac{da}{dt} = \frac{db}{dt} = 0.$$

$$\therefore \text{ इसका अवकल } = \left(2r \frac{dr}{dt} \right) r + r^2 \frac{dr}{dt} + \left(a \frac{dr}{dt} \right) b.$$

$$= 2r \dot{r} r + r^2 \dot{r} + (a \dot{r}) b$$

उदाहरण 2

प्रक्षेप्य (Projectile) की गति के समीकरण का समाकलन करो।
प्रक्षेप्य की गति का समीकरण है।

$$\ddot{\vec{r}} = -g. \quad \dots(1)$$

समाकलन करने पर

$$\dot{\vec{r}} = -gt + \vec{b}. \quad \dots(2)$$

\vec{b} समाकलन का स्थिरांक है जोकि प्रारम्भ में $t=0$ पर वेग का मान है।

(2) का समाकलन करने पर हमें प्राप्त है

$$\vec{r} = -\frac{1}{2} g t^2 + \vec{b} t + \vec{c}.$$

अर्थात् \vec{c} एक और स्थिरांक है जिसका मान $t=0$, पर प्रक्षेप्य की स्थिति से प्राप्त किया जाता है।

प्रश्नावली १३

1. निम्न व्यञ्जकों का अवकलन करो। \mathbf{r} का मापांक a है और वह \mathbf{b} का फलन है। शेष राशियाँ अचर हैं।

$$(i) (a \mathbf{r} + r \mathbf{b})^2, \quad (ii) \left(r^2 \mathbf{r} + a \times \frac{d\mathbf{r}}{dt} \right)$$

$$(iii) \frac{1}{2} k \left(\frac{d\mathbf{r}}{dt} \right)^2, \quad (iv) \left(\frac{\mathbf{r}}{r^2} + \frac{\mathbf{r}}{a \cdot \mathbf{r}} \mathbf{b} \right).$$

$$(v) \mathbf{r}^2 + \frac{1}{r^2} \quad (\mathbf{r}^2 = \mathbf{r} \cdot \mathbf{r}, \text{ एक सदिश-राशि})$$

2. निम्न का प्रथम तथा द्वितीय अवकलन ज्ञात करो।

$$(i) \left[\mathbf{r} \frac{d\mathbf{r}}{dt} - \frac{d^2 \mathbf{r}}{dt^2} \right].$$

$$(ii) \mathbf{r} \times \left(\frac{d\mathbf{r}}{dt} \times \frac{d^2 \mathbf{r}}{dt^2} \right). \quad [\text{इला०, 65}]$$

3. सिद्ध करो कि अवकल-समीकरण को

$$\frac{d^2 \mathbf{r}}{dt^2} = -\mathbf{r},$$

अतिपरवलय (Hyperbola)

$$\mathbf{r} = (\sinh t) \mathbf{a} + (\cosh t) \mathbf{b},$$

संतुष्ट करता है। जबकि \mathbf{a} और \mathbf{b} स्थिर हैं।

4. अवकलन करो

$$\frac{\mathbf{r} + \mathbf{a}}{r^2 + a^2} \quad \text{और} \quad \frac{\mathbf{a} \times \mathbf{r}}{\mathbf{r} \cdot \mathbf{a}}.$$

5. यदि n , \mathbf{a} , \mathbf{b} स्थिर हैं और $\mathbf{r} = (\cos nt) \mathbf{a} + (\sin nt) \mathbf{b}$ \mathbf{r} सिद्ध करो कि

$$(i) \mathbf{r} \times \frac{d\mathbf{r}}{dt} = n \mathbf{a} \times \mathbf{b}.$$

$$(ii) \frac{d^2 \mathbf{r}}{dt^2} + n^2 \mathbf{r} = 0.$$

6. r का मान ज्ञात करो जो निम्न समीकरणों को सतुष्ट करे

$$(i) \quad a \times \frac{d^2 r}{dt^2} = b. \quad (a, b \neq 0.)$$

$$(ii) \quad \frac{d^2 r}{dt^2} = a t + b. \quad (\text{जब } t=0, r \text{ और } r' \text{ शून्य हैं})$$

7. सिद्ध करो कि यदि एक कण केन्द्रीय-त्वरण के प्रभाव से गतिमान है तो इसके क्षेत्र बनाने की दर एक स्विरेक है।
[सकेत माना इसकी गति का समीकरण है।

$$\ddot{r} = f(r).$$

त्वरण सदिश-त्रिज्या के समांतर है।

$$\therefore r \times \ddot{r} = 0.$$

$$\text{अब } r \times \ddot{r} = \frac{d}{dt} (r \times \dot{r}).$$

$$\text{अतः } r \times \dot{r} = c$$

8. यदि $r \times \ddot{r} = 0$ तो सिद्ध करो कि $r \times \dot{r} = a$.

9. दिया हुआ है कि

$$r(t) = 2i - j + k \quad \text{जब } t=2$$

$$= 4i - 2j + 3k \quad \text{जब } t=3$$

तो सिद्ध करो कि

$$\int_2^3 \frac{dr}{dt} dt = 10$$

10. किसी गतिमान कण का समय t पर त्वरण

$$e^t i + e^{2t} j + k$$

है तो t समय पर उसका वेग ज्ञात करो

जबकि $t=0$ पर वेग $i + \frac{1}{2} j$ है।

11. किसी सदिश का एक अदिश-चर t के सापेक्ष अवकलन की व्याख्या करो और निम्न सम्बन्ध का अर्थनिर्णय करो

$$\frac{dr}{dt} = 0,$$

और $r \times \frac{dr}{ds} = 0$ [बनारस 61]

12. सदिश विधि से किसी वक्र पर गतिमान कण का स्पर्श-रेखीय तथा अभिलम्बीय-त्वरण ज्ञात करो।

[माना स्पर्श रेखा तथा अभिलम्ब की दिशाओं में इकाई-सदिश क्रमशः \hat{a} और \hat{b} हैं और s , एक स्थिर बिन्दु से। समय पर कण की दूरी (चाप) है और ψ स्पर्श-रेखा का x -अक्ष पर मुकाव है तो

वेग $V = v\hat{a} = \frac{ds}{dt} \hat{a}$; त्वरण $= \dot{v} \hat{a} + v \hat{a}$... (1)

स्पर्श रेखीय त्वरण $= a$ का गुणांक $= \dot{v} \hat{a} = \frac{d^2s}{dt^2} \hat{a}$... (2)

अब $\hat{a} = \frac{da}{d\psi} \cdot \frac{d\psi}{ds} \cdot \frac{ds}{dt} \cdot \frac{v}{\rho} \cdot \hat{b}$

कुल त्वरण $= \dot{v} \hat{a} + \frac{v^2}{\rho} \hat{b}$

\therefore अभिलम्बीय-त्वरण $= \frac{v^2}{\rho} \hat{b}$... (3)

उत्तरमाला

प्रश्नावली 1

1. $\vec{AC} = a + 3b$; $\vec{DB} = 3b - a$; $\vec{BC} = 2(a + b)$;
 $\vec{CA} = -(a + 3b)$
4. $b - a$; $-a$, $-b$, $a - b$ 16 $3b - 2a$; $2a - b$.

प्रश्नावली 2

1. $\left(\frac{2}{7}, \frac{3}{7}, \frac{6}{7}\right)$; $\left(\frac{4}{9}, \frac{4}{9}, \frac{7}{9}\right)$.
6. $15 + \sqrt{61}$
8. $3, 3\sqrt{2}, 3$; $\left(\frac{2}{3}, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right)$.

प्रश्नावली 3

1. 5 पौ० मा० या वज्र $\frac{(5i + 4j + 3k)}{\sqrt{2}}$.
2. P पौ. भा. और 2 P पौ. भा.
3. $\sqrt{2} F$, F परिणामित वत है।
4. $2 \vec{OP}$, OP कोने O से मे घन का विकर्ण है।
5. एकमानतः स्वनम्
6. $\sqrt{17}$ मी. प्र. व. पूर्व से $\tan^{-1} \frac{1}{4}$ उतर की ओर।

7. $\frac{1}{3} (i + j + k).$

11. $\frac{\sqrt{3} i + j}{2}; j - \frac{1}{2} (j - \sqrt{3} i), -\frac{1}{2} (i + j);$
 $\frac{1}{\sqrt{2}} (i + j), \frac{1}{\sqrt{2}} (-i + j).$

13. $(30 - 5\sqrt{3}) i + 4j,$ 14. $6 \frac{1}{4}$ फु. से, 9 फुट,
 $1 \frac{23}{15}$ से. पश्चात् ।

16. $\vec{6AG}$, जबकि G पद्मज का केन्द्रक है ।

प्रश्नावली 4

1. $r = (1+t)i + 2(t-1)j + k.$

प्रश्नावली 5

3. $\frac{1}{3} (5, 4, 1).$ 4. $(21, 8, 2)$ और $(-15, -16, -6)$

प्रश्नावली 6

5. (i) $\sin \theta = \sqrt{\frac{2}{7}}, \cos \theta = \sqrt{\frac{3}{21}},$

(ii) $\sin \theta = \frac{\sqrt{185}}{3\sqrt{26}}, \cos \theta = \frac{7}{3\sqrt{26}}.$

17. $\cos^{-1} \frac{1}{3}.$

20. $\left(\frac{-3}{\sqrt{35}}, \frac{5}{\sqrt{35}}, \frac{1}{\sqrt{35}} \right), \cos^{-1} \frac{\sqrt{21}}{6}.$

प्रश्नावली 7

5. $6\sqrt{5}$ इकाई 6. $5\sqrt{3}$ इकाई

7. $\sqrt{\frac{5}{21}}.$ 8. 20.5 इकाई

प्रश्नावली 8

$$2. \quad \frac{5}{9} (-33i + 74j + 32k), \frac{-55}{3}, \frac{370}{9}, \frac{160}{9},$$

$$3. \quad 4 \sqrt{\frac{91}{10}} \text{ or } \frac{4}{\sqrt{10}}(i, -3, -9).$$

$$6. \quad 7(k - 4i - j).$$

$$7. \quad 40 \text{ इकाई}$$

प्रश्नावली 9

$$4. \quad -14$$

$$6. \quad p = 5$$

$$10. \quad 90^\circ \text{ और } 60^\circ$$

$$11. \quad 7 \text{ घन इकाई}$$

$$16. \quad (-1, 10, 4).$$

प्रश्नावली 10

$$1. \quad (i) 0$$

$$(ii) 2 [bdc]a.$$

$$3. \quad \frac{1}{9}(2i + k), \frac{1}{9}(-8i + 3j - 7k), \frac{1}{9}(-7i + 3j - 5k).$$

प्रश्नावली 11

$$1. \quad r \cdot (b \times c) = [abc]. \quad 2. \quad 2x + 17y + 8z + 36 = 0.$$

$$4. \quad r \cdot (3i - 4j + 7k) + 13 = 0.$$

$$5. \quad r \cdot (2i - 7j - 13k) = 1.$$

$$6. \quad r \cdot (i + 2j - 3k) = 0.$$

$$7. \quad r \cdot (i - j - k) + 2 = 0, (2i + 3j + k).$$

$$9. \quad r \cdot (25i + 17j + 62k) = 78 \text{ यह उस कोण का समद्विभाजक है जिस में मूल बिन्दु स्थित है। और}$$

$$r \cdot (i + 55j - 10k) = 156.$$

$$10. \quad r = c + t a \times [b \times (c - a)].$$

$$16. \quad 1/\sqrt{6}, 11x + 2y - 7z + 6 = 0 \text{ और } 7x + y - 5z + 7 = 0$$

$$\text{की प्रतिच्छेद रेखा, या } [r - (i + 2j + 3k), 2i + 3j + k,$$

$$\{(2i + 3j + 4k) \times (3i + 4j + 5k)\}$$

$$\text{और } [r - (2i + 4j + 5k), 3i + 4j + 5k, \{(2i + 3j + 4k) \times (3i + 4j + 5k)\}]]$$

17. $\frac{9}{10}$ इकाई (लगभग)

19. $\frac{q_1 - r \cdot n_1}{n_1} = \frac{q_2 - r \cdot n_2}{n_2} = \frac{q_3 - r \cdot n_3}{n_3}$

20. $\frac{1}{[abc]} [b \times c + c \times a + a \times b]$

प्रश्नावली 12

8 $r \cdot [r - a(i + j + k)] = 0$

प्रश्नावली 13

1 (i) $2(ar + rb)(a\dot{r} + r\dot{b})$

(ii) $3r^2\dot{r} + r^3\ddot{r} + a \times \ddot{r}$

(iii) $k \cdot \ddot{r}$

(iv) $\frac{r}{r^2} - \frac{2\dot{r} \cdot r}{r^3} - \frac{r(a \cdot \dot{r})b}{(a \cdot r)^2}$

(v) $2r\dot{r} - \frac{2\dot{r}^2}{r^3}$

2. प्रथम अवकलन

$$\left[r \frac{dr}{dt} \frac{d^3r}{dt^3} \right], \frac{dr}{dt} \times \left(\frac{dr}{dt} \times \frac{d^2r}{dt^2} \right) + r \times \left(\frac{dr}{dt} \times \frac{d^3r}{dt^3} \right)$$

4. $\frac{\dot{r}}{r^2 + a^2} - \frac{2r(r\dot{r} + a)}{(r^2 + a^2)^2}$

$$\frac{\dot{r} \times a}{r - a} - \frac{(\dot{r} \cdot a) r \times a}{(r \cdot a)^2}$$

प्रश्न 932

6 (i) $r = \lambda a + d + t c + \frac{1}{2} t^2 b \times a/a^2$

जबकि λ एक अदिश है और c समाकलन का स्थिरांक है।

(ii) $\frac{1}{6} at^3 + \frac{1}{2} bt^2$

10. $c^t [1 + \frac{1}{2} e^{2t} j + t k]$